Теорія портфеля.

1. Поняття про диверсифікацію, норму прибутку і ризик цінних паперів.

Для роботи будь-якого підприємства важливий асортимент товарів, послуг. Чим він ширший, тим чіткіший є ритм виробництва, вища його рентабельність. Проте це впливає на мобільність відносно змін зовнішнього середовища.

На ринку цінних паперів в країнах з розвинутою ринковою економікою основний принцип раціонального поводження відповідає побутовій мудрості: "Ніколи не клади всі яйця до одного кошика ". Стосовно ризику цінних паперів це означає ,що інвестор не повинен вкладати гроші у цінні папери лише одного виду. Необхідне певне розмаїття, диверсифікація вкладень. Отже:

Диверсифікація – це розподіл інвестицій між різними об'єктами вкладення, які безпосередньо не зв'язані між собою.

З допомогою диверсифікації в більшості випадків вдається знизити ризик. Отже диверсифікація – це один із способів зниження ризику.

Найчастіше інвестиції здійснюються за допомогою цінних паперів.

Ефективність цінних паперів залежить:

1) ціна купівлі (це відома величина)
2) проміжних виплат
3) ціна продажу

Економічний фінансовий ризик пов'язаний з невизначеністю відносно прогнозу на майбутнє стосовно цін (продажу, а для звичайних акцій і майбутніх дивідендів).

Власне тому досвідчений інвестор є власником не одного виду цінних паперів, а декількох. Сукупність цінних паперів складає портфель.

Під **структурою цінних паперів** розуміють співвідношення часток інвестицій у цінні папери різних видів та підприємств у різного інвестора.

Визначення структури є дуже важливим. Приймається гіпотеза, що будь-які конкретні величини ефективності (норми прибутку) операції з купівлі-продажу цінних паперів є реалізаціями випадкової величини. Тому основним апаратом для вивчення властивостей портфеля є правила теорії імовірності та математичної статистики.

Будь-який вид ризикових цінних паперів характеризуються двома показниками: сподіваною ефективністю (нормою прибутку) і ступенем ризику (варіацією (дисперсією)). Ці ж показники можна обчислити для портфеля цінних паперів, якщо відомі коефіцієнти кореляції між ефективностями кожної з пар цих паперів.

Зрозуміло, що кожний інвестор завжди зіштовхується з дилемою: бажанням мати якомога більшу ефективність портфеля та бажанням забезпечити вклади мінімальним ступенем ризику.

Проблемою обрання структури портфеля займалися Г. Марковіц та Д. Тобін, за що були відзначені Нобелівськими преміями з економіки.

Портфель цінних паперів – це розподіл засобів між цілим рядом різних активів у найбільш вигідній та безпечній пропорції.

Правило для інвестора: - необхідно прагнути розподілити вкладання між різними видами активів, такими що показали минулі роки:

1) різну щільність зв'язку (кореляцію) з загальноринковими цінами;

2) протилежну фазу коливань норми прибутку між собою (цін) всередині портфеля.

При цьому збитки будуть мінімальними. Але питання одержання максимального прибутку залишається відкритим. Для цього необхідне застосування теорії корисності.

Управління портфелем цінних паперів – це планування, аналіз і регулювання структури портфеля, діяльність по його формуванню та підтримці з метою досягнення поставлених цілей при збереженні необхідного рівня його ризику та мінімізації затрат, що пов'язані з ним.

Основні цілі інвестування :

1) одержання прибутку;

2) збереження капіталу;

3) забезпечення приросту капіталу (на базі зростання курсової вартості цінних паперів).

Ліквідність цінних паперів розглядають з двох позицій:

- здатність швидкого перетворення всього портфеля цінних паперів у грошові засоби (з певними невеликими затратами на реалізацію).
- здатність своєчасно погасити зобов'язання перед кредиторами, повернення позичених у них грошей ,за рахунок яких був сформований портфель цінних паперів.

Ризик портфеля – це міра можливості того , що настануть обставини, за яких інвестор може понести збитки, спричинені інвестиціями в портфель цінних паперів ,а також операціями по залученню ресурсів до формування портфеля.

Кінцевою метою найтиповішого управління портфелем є прибутковість, тобто перевищення доходів від інвестицій в цінні папери над затратами на залучення грошових ресурсів, необхідних для цих вкладень , за умов забезпечення певного ступеня ліквідності та ризику портфеля.

Основною характеристикою кожного цінного паперу є норма прибутку. Її визначають, як відношення прибутку котрий приносить даний цінний папір, до затрат, пов'язаних з купівлею цього цінного паперу.

Норма прибутку є одним з основних критеріїв , якими керуються інвестори, під час прийняття рішення щодо купівлі цінних паперів.

Зрозуміло, що значення норми прибутку пов'язане з невизначеністю, тобто є випадковою змінною. Це означає , що вона може приймати різні значення з різними імовірностями.

Введемо n- кількість можливих для спостереження величин норми прибутку.

R_i – i-те можливе значення норми прибутку (i=1, n).

P_i – імовірність i-ї величини норми прибутку (i=1, n).

Тоді сподівана норма прибутку обчислюється:

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i \qquad 1.1$$

Приймають, зокрема, що поводження в майбутньому цінного паперу залежить від того , як формувалися його норми прибутку в минулому.

Введемо : T – кількість періодів , що минули ;

R_t – норма прибутку від цінного паперу, що мала місце в t – му періоді.

У випадку звичайної акції норма прибутку в t – му періоді визначається :

$$R_t = \frac{(C_t - C_{t-1} + D_t) \times 100}{C_{t-1}} \qquad 1.2$$

C_t — ціна паперу в t – му періоді, D_t — дивіденди, нараховані в t – му періоді.

Сподівана норма прибутку ЦП:

$$m = (\sum_{t=1}^{T} R_t) / T \qquad 1.3$$

Другою важливою характеристикою є ризик ЦП – середнє квадратичне відхилення норми прибутку

$$\sigma = \sqrt{D} \qquad 1.4$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} p_i (R_i - m)^2 \qquad 1.5$$

У випадку, коли наявні статистичні дані щодо минулого, дисперсію визначають :

$$D = \sum_{t=1}^{T} (R_t - m)^2 / (T - 1) \qquad 1.6$$

Приклад. На знаходження ризику ЦП

Стан економічного середовища	Імовірність	Норма прибутку
піднесення	0,5	40%
застій	0,4	5%
занепад	0,3	–10%

Розвязання:

Знаходимо сподівану норму прибутку ЦП.

m=40·0,3+5·0,4+(–10)·0,3=11%

визначимо дисперсію ЦП

D=40^2·0,3+5^2·0,4+10^2·0,3–11^2=399

$\sigma = \sqrt{399} = 19,97\%$ — ризик ЦП.

Приклад. Знайти ризик акції ***A***, відносно якої ми маємо статистичні дані за останні 5 років.

Період часу	C_t	d_t	$C_t – C_{t-1}$	R_t
0	140	-	-	-
1	150	5	10	10,71
2	165	4	15	12,07
3	155	3	–10	–4,85
4	160	2	5	5,16
5	157	1	–3	1,25

Розвязання. За формулою 1.2 знаходимо норми прибутку акції за певний період

$$R_1 = \frac{10+5}{140}100 = 10,71\%,\ R_2 = \frac{15+4}{150}100 = 12,07\%$$ і т. д.

Знаходимо середню норму прибутку цінного паперу:

$$m = \frac{10,71 + 12,07 + (-4,85) + 5,16 - 1,25}{5} = 4,49$$

Дисперсія цінного паперу :

$$D = \frac{\left(10,71-4,49\right)^2 + \left(12,07-4,49\right)^2 + \left(-4,85-4,49\right)^2 + \left(5,16-4,49\right)^2 + \left(-1,25-4,49\right)^2}{4} =$$

$$= 56,56;$$

$$\sigma = \sqrt{56,56 =} 7,52$$

2.Оптимізація пакету з двох різних видів акцій.

Як правило, розсудливий інвестор шукає такі можливості розміщення капіталу, за яких зі збільшенням норми прибутку одночасно зменшувався ступінь ризику. Такі можливості дає йому формування портфеля цінних паперів. Вона характеризує взаємозв'язок між нормами прибутку ЦП.

Припустимо що портфель утворюють дві різні акції *A* та *B*:

Види акцій	Норма прибутку	дисперсія	середньоквадратичне відхиленя
A	m_1	D_1	σ_1
B	m_2	D_2	σ_2

Припустимо, що інвестор володіє портфелем, до якого входить 100 акцій певної дніпропетровської фірми (А) та 200 акцій певної київської фірми (В).

Ціна однієї акції А – 500 тис грн., В – 200 тис грн. Знайдемо частку вартості кожного виду акцій в портфелі :

$$x_1 = \frac{100 \cdot 500}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0,56,\ x_2 = \frac{200 \cdot 200}{100 \cdot 500 + 200 \cdot 200} = 0,44,$$

Очевидно, що частка кожної є величиною $0 \le x \le 1$.

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad 2.1$$

Частки можна трактувати як частини від одиниці капіталу (грошей), що вкладені у відповідний вид цінних паперів. Знаючи сподівані величини норми кожної з цих акцій та їх частки в портфелі, легко визначити сподівану норму прибутку портфеля з двох акцій за формулою:

$$m_p = m_1x_1 + m_2x_2 \qquad 2.2.$$

де m_p — норма прибутку портфеля двох різних акцій.

Норма прибутку портфеля з двох різних акцій є зваженою середньою нормою прибутку кожного виду акцій, причому ваговими коефіцієнтами виступають частки цих акцій (в грошовому обсязі) в портфелі .

Приклад. Інвестор володіє портфелем, що складається з двох акцій A та B з нормами прибутку 200% та 250% відповідно, причому частка акцій A становить 40% портфеля. Знайти сподіваний прибуток портфеля.

Розв'язання:

$$m_p = 0,4 \cdot 200 + 0,6 \cdot 250 = 230\%$$

Норма прибутку портфеля з двох акцій завжди знаходиться в інтервалі, межами якого є норми прибутку акцій, що входять до портфеля .

Визначимо ризик (варіація і дисперсія) портфеля двох акцій:

$$V_p = D_p = \sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \qquad 2.3$$

σ_1 — середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій першого виду;

σ_2 — середнє квадратичне відхилення норми прибутку акцій другого виду;

ρ_{12} — коефіцієнт кореляції між акціями обох видів і визначається :

$$\rho_{12} = \frac{\sum p_i(R_{1i} - m_1)(R_{2i} - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} \qquad 2.4$$

p_i — імовірність стану середовища;

R_{1i} — норма прибутку акцій першого виду;

m_1 — середня норма прибутку акцій 1-го виду;

R_{2i} — норма прибутку другого виду акцій;

m_2 — середня норма прибутку акцій 2-го виду.

1. Коефіцієнт кореляції $-1 \le \rho_{12} \le 1$.

2. $|\rho_{12}|$ вказує на силу взаємозв'язку норм прибутку акцій, тому чим вищою є абсолютна величина , тим сильніше між собою пов'язані ці акції (тобто ≈ 1, або ≈ -1), якщо ж $|\rho_{12}| \to 0$, то ці акції слабо пов'язані.

3. Знак коефіцієнта кореляції вказує на напрямок взаємозв'язку норми прибутку акцій; якщо $\rho_{12} > 0$, то додатна кореляція, при зростанні норми прибутку R_1 однієї акції зростає, зростає R_2 другої акції і навпаки.

Якщо $\rho_{12} < 0$, то від'ємна кореляція, при зростанні норми прибутку R_1 однієї акції зростає, R_2 другої акції спадає.

На практиці додатна кореляція зустрічається частіше. Це пов'язано з так званою, силою прискорення ринку.

Маючи інформацію відносно норм прибутку акцій у минулому, коефіцієнт кореляції двох акцій приймає такий вигляд:

$$\rho_{12} = \frac{\sum (R_{1t} - m_1)(R_{2t} - m_2)}{(T-1)\sigma_1\sigma_2} \qquad 2.5$$

де T — к-сть попередніх періодів, для яких маємо інформацію;

R_{1t} — норма прибутку першого цінного паперу в t-му періоді;

R_{2t} —норма прибутку другого цінного паперу в t-му періоді;

m_1 — сподівана норма прибутку першої акції;

m_2 — сподівана норма прибутку другої акції;

σ_1 — ризик І-го цінного паперу;

σ_2— ризик ІІ-го цінного паперу.

Як видно ризик портфеля залежить не тільки від ризику кожного виду акцій, а і від кореляції цих акцій, тобто від ступеня взаємодії їх норм прибутку.

Далі більш детально проаналізуємо вплив кореляції на ризик портфеля, тобто відшукаємо оптимальну структуру портфеля, яка б забезпечила мінімальний ризик.

Так як $x_1 + x_2 = 1$ то $x_2 = 1 - x_1$, підставимо в (2.3), отримаємо:

$$D_p = x_1^2\sigma_1^2 + (1-x_1)^2\sigma_2^2 + 2x_1(1-x_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \qquad 2.6$$

Мінімум ми можемо знайти, якщо прирівняти до нуля похідну D_p, по x_1.

$$\frac{dD_p}{dx_1} = 2x_1\sigma_1^2 - 2(1-x_1)\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4x_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0$$

Отримаємо:

$$x_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) - \sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0$$

$$x_1^* = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \sigma_1\rho_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \qquad 2.7$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* \qquad 2.8$$

З математичної сторони визначення найменшого значення ризику портфеля акцій – це задача знаходження мінімального значення функції $\sigma_p^2(x_1)$ на закритому проміжку [0;1].

При цьому можливі такі випадки:

1) $0 \le x_1^0 \le 1$;

2) $x_1^0 = 0$ або $x_1^0 = 1$.

У першому випадку порівнюємо між собою три значення ризику портфеля $\sigma_p^2(0)$, $\sigma_p^2(x_1^0)$, $\sigma_p^2(1)$ і вибираємо найменше з них. У другому випадку вибираємо найменше з двох значень $\sigma_p^2(0)$, $\sigma_p^2(1)$. Оптимальною часткою $\tilde{x}_1$ акцій першого виду буде значення аргументу, яке відповідає найменшому значенню σ_p^2.

Обчислимо оптимальну кількість акцій кожного виду у портфелі. Нехай інвестор вкладає в акції капітал S і ціни однієї акції кожного виду відповідно рівні c_1, c_2. Тоді оптимальні кількості акцій n_1, n_2, першого і другого виду визначаються за формулами:

$$n_1 = \left[\frac{x_1 \cdot S}{C_1}\right], \qquad n_2 = \left[\frac{S - C_1 \cdot n_1}{C_2}\right]$$

Тут використано позначення [N] цілої частини числа N, під яким розуміється найбільше ціле число, що не перевищує N. Наприклад, [8,7]=8.

Приклад. Визначити оптимальний портфель з акцій двох видів 1 та 2.

Норми прибутків акцій та їх імовірності дані в таблиці 1. Ціни однієї акції кожного виду такі: $C_1 = 1{,}6\ гр.\,од.$, $C_2 = 1{,}2\ гр.\,од.$

Інвестиційний капітал $S = 2000\ гр.\,од.$

Стан економіки	Імовірність	Норма прибутку акцій, %	
		1	2
Піднесення	0,3	15	20
Застій	0,4	6	–2
Спад	0,3	–10	–5

Розв’язок:

Обчислюємо сподівані норми прибутків акцій.

$$m_1 = 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}4 \cdot 6 - 0{,}3 \cdot 10 = 3{,}9\%,$$

$$m_2 = 0{,}3 \cdot 20 - 0{,}4 \cdot 2 - 0{,}3 \cdot 5 = 3{,}7\%.$$

Знаходимо дисперсії норм прибутків.

$$\sigma_1^2 = 0{,}3 \cdot (15 - 3{,}9)^2 + 0{,}4 \cdot (6 - 3{,}9)^2 + 0{,}3(-10 - 3{,}9)^2 = 96{,}69,$$

$$\sigma_2^2 = 0{,}3 \cdot (20 - 3{,}7)^2 + 0{,}4 \cdot (-2 - 3{,}7)^2 + 0{,}3(-5 - 3{,}7)^2 = 115{,}41,$$

$$\sigma_1 = \sqrt{96{,}69} = 9{,}833, \ \sigma_1 = \sqrt{115{,}41} = 10{,}74.$$

Визначаємо коефіцієнт кореляції норм прибутків акцій:

$$\rho_{12} = \frac{0{,}3(15 - 3{,}9)(20 - 3{,}7) + 0{,}4(6 - 3{,}9)(-2 - 3{,}7) + 0{,}3(-10 - 3{,}9)(-5 - 3{,}7)}{9{,}833 \cdot 10{,}74} = 0{,}812$$

Обчислюємо величину x_1^0

$$x_1^0 = \frac{10{,}74(10{,}74 - 9{,}833 \cdot 0{,}812)}{96{,}69 + 115{,}41 - 2 \cdot 9{,}833 \cdot 10{,}74 \cdot 0{,}812} = 0{,}729.$$

Отже, маємо перший випадок $0 < x_1^0 < 1$. Знаходимо значення $\sigma_p^2(x_1^0)$.

$$\sigma_p^2(x_1^0) = 0{,}729^2 \cdot 96{,}69 + (1 - 0{,}729)^2 \cdot 115{,}41 +$$
$$+ 2 \cdot 0{,}729 \cdot (1 - 0{,}729) \cdot 9{,}833 \cdot 10{,}74 \cdot 0{,}812 = 93{,}743$$

Оскільки $\sigma_p^2(x_1^0)$ менша, ніж $\sigma_p^2(0) = \sigma_2^2$ і $\sigma_p^2(1) = \sigma_1^2$, то $\tilde{x}_1 = x_1^0$, тобто оптимальна частка акцій першого виду дорівнює 0,729.

Визначаємо оптимальну кількість акцій кожного виду в їх портфелі.

$$n_1 = \left[\frac{0{,}729 \cdot 2000}{1{,}6} \right] = 911 \text{ штук},$$

$$n_2 = \left[\frac{2000 - 1{,}6 \cdot 911}{1{,}2} \right] = 452 \text{ штук}.$$

Проаналізуємо вплив кореляції на ризик портфеля. Для цього візьмемо за основу формулу (2.3):

$$D_p = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}, \text{ або}$$

$$D_p = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2$$

і проаналізуємо деякі основні випадки, коли ρ_{12} рівне або 1, або 0.

Розглянемо випадок коли $\boldsymbol{\rho_{12} = 1}$ – це один з екстремальних випадків, що означає абсолютно додатню кореляцію між нормами прибутку двох акцій. Це має місце, коли розглядати акції підприємств, що виготовляють взаємодоповнюючі товари (автомобілі – шини), і норми прибутків від однієї акції змінюються прямо-пропорційно нормам прибутку від другої акції.

Підставимо значення коефіцієнта кореляції (дисперсії)

$$D_p = (x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2)^2 \rightarrow \sigma = \sqrt{D_p}$$

$$\sigma_p = \left| x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 \right| \qquad 2.9$$

- це ризик портфеля, що у випадку абсолютно додатньої кореляції між нормами прибутків певних акцій, ризик портфеля є середньозваженою величиною ризику окремих видів акцій, що входять до його складу, а вагомими коефіцієнтами є частина цих акцій в портфелі.

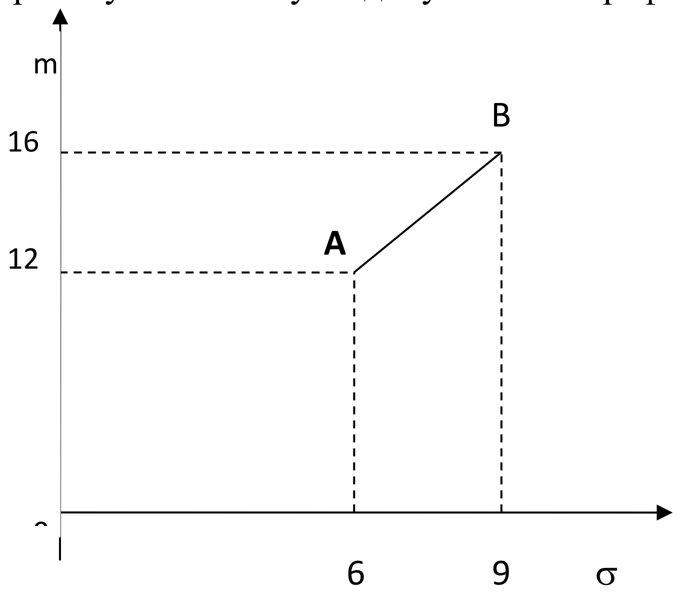
<u>*Приклад.*</u> Дві акції А та В (1;2) мають сподівані норми прибутку $m_1=12\%$, $m_2=16\%$ і ступені ризику $\sigma_1= 6\%$, $\sigma_2 =9\%$ та коефіцієнт кореляції $\rho_{12}=1$.

Розв'язання:

$$m_p = x_1 12 + x_2 16$$

$$\sigma_p = \left| x_1 6 + x_2 9 \right|$$

Цей приклад можна проілюструвати графічно в двовимірному просторі.підставляючи різні значення x_1 і x_2, причому $x_1+x_2=1$, тобто змінюючи структуру портфеля, визначатимемо значення сподіваної норми прибутку та ризику множини усіх допустимих портфелів акцій.



Також слід зазначити, що точка **А** - відповідає портфелеві що складається лише з акцій *А*, а точка **В** – з акцій *В*. Середина відрізку **АВ** відповідає портфелеві, де обидві акції мають частку $x_1 = x_2=0,5$.

Випадок абсолютно додатньої кореляції акцій не дозволяє досягнути якогось суттєвого ефекту, зменшуючи ризик отримуємо прямопропорційне зменшення сподіваної норми прибутку і навпаки. Цей випадок нецікавий для інвестора, бо тут дуже обмежене поле для маневру.

II $\rho_{12}=-1$ – екстремальний випадок означає абсолютно від'ємну кореляційну залежність між нормами прибутку 2-ох акцій.

Підставляємо формулу (2.3) отримаємо:

$$D_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 - 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = (x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2$$

$$\sigma_p = \left| x_1 \sigma_1 - x_2 \sigma_2 \right| \qquad 2.10$$

- показує, що ризик портфеля в цьому особливому випадку можна суттєво зменшити.

Якщо σ_p прирівняти до нуля, а цього можна досягти, коли

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad x_2 = 1 - x_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad 2.11$$

Тобто у випадку абсолютно від'ємної кореляції є можливість обрати таку структуру портфеля, котрий цілком позбавлений ризику.

Приклад той же.

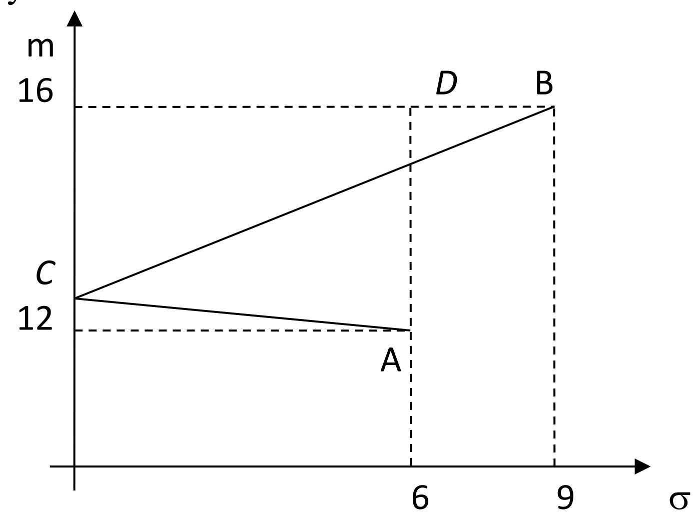
A	B
m_1=12%	m_2=16%
σ_1=6%	σ_2=9%

ρ_{12}=-1

Розв'язання:

$$m_p = x_1 12 + x_2 16$$
$$\sigma_p = \left| x_1 6 + x_2 9 \right|$$

Проілюструємо:



Для цього випадку множина всіх допустимих портфелів складається точок ламаної ACB. Точки A та B відповідають портфелям, що складаються лише з одного виду акцій (A та B відповідно).

Слід зауважити що виходячи з точки A і збільшуючи в портфелі частку акцій B, отримуємо зростання норми прибутку і одночасно зменшення ступеня ризику.

В точці C маємо портфель з нульовим ступенем ризику.

Підставляючи відповідні значення в (2.11) одержимо, що $x_1 = 0.6$, $x_2 = 0,4$ а ризик портфеля рівний нулю при цьому $m_p = 13,6$.

Розсудливий інвестор не обере портфель з AC, бо знайдеться кращий з CD.

Відрізок CD – множина ефективних портфелів.

III ρ_{12} **=0.**

Цей випадок означає відсутність взаємозв'язку між акціями, тобто формування норми прибутку другої акції.

Підставляємо це значення в (5.2.3)

$$D_p = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 \quad \sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2}, \tag{2.12}$$

що є можливістю часткової реакції ризику портфеля двох акцій. Підставимо $x_2=1-x_1$ в (2.12), обчислимо першу похідну по x_1, і прирівняємо до нуля, цим ми дізнаємось значення мінімуму.

$$\frac{d\sigma_p}{dx_1} = \frac{x_1\sigma_1^2 - (1-x_1)\sigma_2^2}{\sqrt{x_1^2\sigma_1^2 - (1-x_1^2)\sigma_2^2}} = 0$$

Розв'язавши отримаємо:

$$x_1^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \qquad x_2^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \tag{2.13}$$

оптимальна структура портфеля.

Тоді підставимо значення в (2.12) і отримаємо:

$$\sigma_p = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \tag{2.14}$$

мінімальне значення ризику.

Приклад. Нехай ми маємо дві різні звичайні акції А та В (1, 2) з:

m_1=40%	m_2=60%
σ_1=5%	σ_2=8%

і $\rho_{12}=0$

Обчислити та проаналізувати сподівану норму прибутку та ризик портфелів, які можливо сформувати з цих акцій.

Розв'язання:

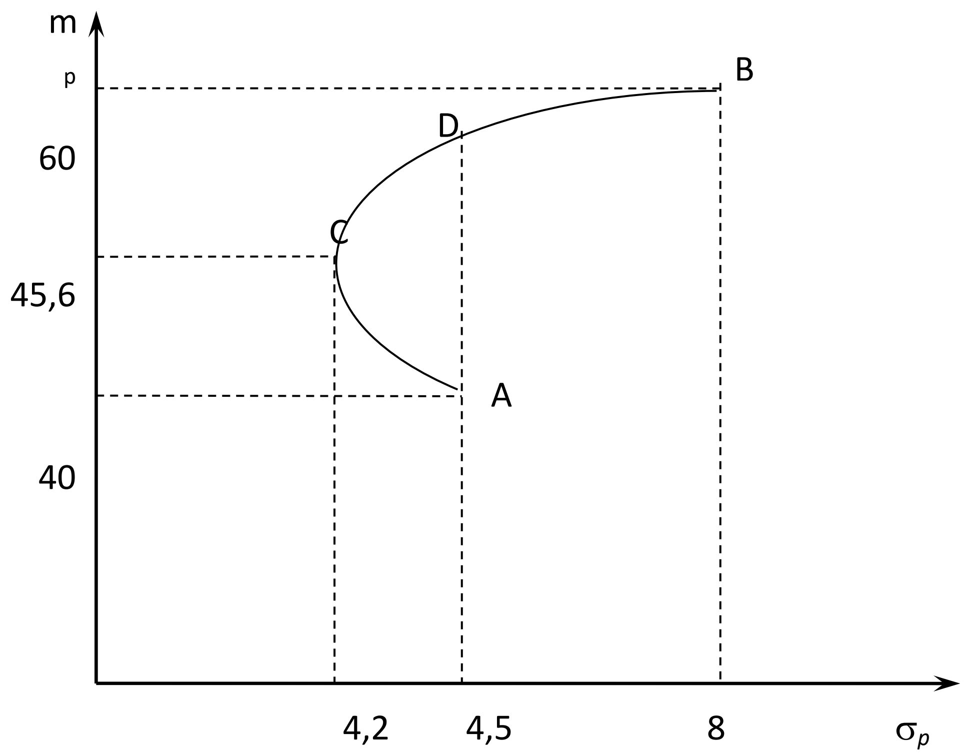
підставимо значення в формули

$m_p=x_1 \cdot m_2 + x_2 \cdot m_2$ $\qquad$ $m_p=x_1 \cdot 40+ x_2 \cdot 60$

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2} \qquad \sigma_p = \sqrt{x_1^2 25 + x_2^2 64}$$

Усі допустимі портфелі належать АВ

Точка А та В знову відповідають портфелям, в які входять лише акції виду А та В відповідно.



Відзначимо, що виходячи з точки А і збільшуючи частку В портфелі, отримуємо зростання норми прибутку і зниження ступеня ризику. Доходячи до точки С, отримуємо портфель з мінімальним можливим ступенем ризику.

Тоді частка акцій А та В в цьому портфелі за формулою (5.2.13) становить: $x_1^*=0,72$, $x_2^*=0,28$,

ризик портфеля $\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2} = 4{,}24\%$

Мінімальний ризик $$\sigma_p = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} = 4{,}3\%$$

m_p=45,6

Збільшуючи надалі частку акцій В в портфелі ($x_2>0.28$) отримуємо подальшу норму прибутку портфеля. При цьому ризик теж зростає відносно своєї мінімальної величини.

З малюнка видно, що розсудливий інвестор напевно не обере жодного із портфелів з **АС** бо для кожного такого портфеля знайдеться кращий з **CD** – він кращий, бо при такому ж ступені ризику дає більш значні норми прибутку звідси випливає, що **CB** – множинна ефективніших портфелів.

Зрозуміло, що залучення до портфеля, котрий складався лише з одного виду акцій, другого виду акцій, приводить до зниження ризику при одночасному зростанні норми прибутку

Такі дії інвестора називається диверсифікацією.

Розрізняють:

- “наївну” – без використання коефіцієнта ρ_{12},
- “розсудливу”–з врахуванням ρ_{12},.

3 Портфель з багатьох акцій.

Перейдемо до загального випадку, коли до складу портфеля залучено багато різних акцій.

n – кількість різних акцій залучених до портфеля.;

m_i – сподівана норма прибутку *i*-ої акції;

G_i –ризик *i*-ої акції;

ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції *i*-ої та *j*-ої акції;

x_i - частка *i*-ої акції залученої до портфеля.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i\,i} = 1$$

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \qquad 3.1$$

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \qquad 3.2$$

$$\sigma_p = \sqrt{D_p} \qquad 3.3$$

Ризик портфеля, можна трактувати, як суму двох складових . перша складова віддзеркалює індивідуальний ризик кожної з акцій.

Оскільки це середньозважена варіацій (дисперсій) окремих акцій (вагомими коефіцієнтами виступають квадрати часток акцій в портфелі);

друга складова характеризується взаємозв'язками між парами акцій, тобто показує вплив коефіцієнтів кореляції пар акцій на ризик портфеля;

від'ємні величини коефіцієнтів кореляції призводять до зменшення варіації портфеля.

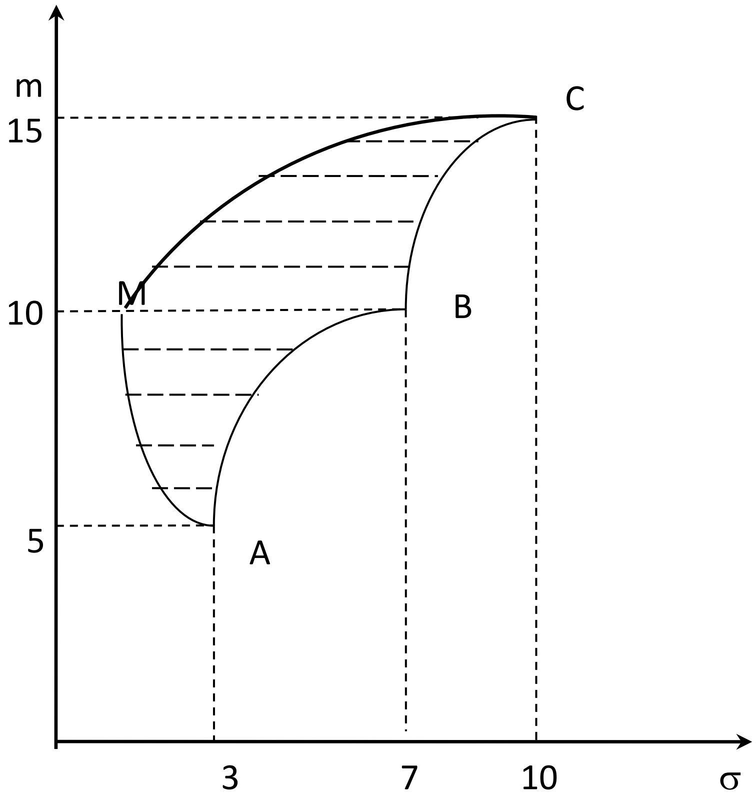
Приклад. Дано акції ***A***: m_1=5%, σ_1=3%, ρ_{12}=0,6;

B: m_2=10%, σ_2=7%, ρ_{13}=0,2;

C: m_3=15%, σ_3=10%, ρ_{23}= –0,4. визначити допустиму множину портфелів.

Розв'язання: побудуємо графік.

З малюнка видно, що кожен розсудливий інвестор обере будь-який з портфелів, що належать [MC], бо будь-якої іншої точки, що належить даній фігурі (таких, що не належать MC) знайдеться



відповідна точка з МС, для якої при тому ж значенні величини ризику, норма прибутку буде більшою.

Заштрихована область, точки котрої характеризують ступінь ризику та норму прибутку портфеля за всіх можливих часток окремих акцій в портфелі, називаються допустимою множиною портфелів.

Множина точок МС – називається ефективною множиною портфелів. Тобто ефективним портфелем з допустимої множини буде такий, для якого не існує іншого:

- з тим самим значенням величини норми прибутку і меншим ступенем ризику;
- з тим самим значенням величини ризику і більшим значенням норми прибутку.

Математична модель задачі про мінімізацію ризику портфеля має такий вид:

$$\sigma_p^2 \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 1; 2; ...n.$$

Розв‘яжемо цю задачу, наприклад, методом множиників Лагранжа. Для цього утворимо таку функцію.

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1).$$

Досліджуємо цю функцію на мінімум. З цією метою прирівняємо до нуля частинні похідні першого порядку даної функції відносно змінних x_i ($i=1;2;...n$) та λ. Одержимо систему (n+1) лінійних алгебраїчних рівнянь з таким же числом невідомих.

$$\begin{cases} 2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_n + \lambda = 0 \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1 + 2\sigma_2^2 x_2 + \ldots + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_n + \lambda = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_1 + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_2 + \ldots + 2\sigma_n^2 x_n + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

Відмітимо, що метод Лагранжа не враховує, що $x_i \geq 0$.

Якщо всі розв‘язки x_i системи рівнянь невід‘ємні, то задача розв‘язана. Якщо деякі x_i від‘ємні, то серед них вибираємо найменше і приймаємо його рівним нулю. Тоді розв‘язуємо задачу оптимізації без цінного паперу відповідного виду. Процес вилучення “несприятливих” видів цінних паперів продовжуємо до моменту одержання решти невід‘ємних значень x_i.

Приклад. Сподівані норми прибутків акцій 1-го, 2-го та 3-го видів рівні відповідно 30%, 40%, 50%, їх ризики – 10%, 20%, 25%, коефіцієнти кореляції норм прибутків $\rho_{12} = 0,2; \rho_{13} = -0,3; \rho_{23} = -0,4$.

Визначити частки акцій в пакеті з мінімальним ризиком. Обчислити цей ризик та сподівану норму прибутку пакета.

Розв‘язання. Складаємо систему рівнянь для визначення часток x_1, x_2, x_3 акцій в пакеті. Вона має такий вид.

$$\begin{cases} 200x_1 + 80x_2 - 150x_3 + \lambda = 0 \\ 80x_1 + 800x_2 - 400x_3 + \lambda = 0 \\ -150x_1 - 400x_2 + 1250x_3 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Її розв‘язок x_1=0,6111; x_2=0,1758; x_3=0,2131.

Обчислюємо ризик пакета.

$$\sigma_p^2 = x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} +$$

$$+2x_1x_3\sigma_1\sigma_3\rho_{13} + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_2x_3\sigma_2\sigma_3\rho_{23} =$$

$$= 0,6111^2 \cdot 10^2 + 0,1758^2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 0,6111 \cdot 0,1758 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,2 -$$

$$-2 \cdot 0,6111 \cdot 0,2131 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0,3 + 0,2131^2 \cdot 25^2 -$$

$$-2 \cdot 0,1758 \cdot 0,2131 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 0,4 = 52,1632(\%)^2$$

, $\sigma_p = \sqrt{52,1632} = 7,2224\%$.

Знаходимо сподівану норму прибутку пакета.

$$m = x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 = 0,6111 \bullet 30 + 40 \bullet 0.1758 + 50 \bullet 0,2131 = 36,02\%$$

Розглянемо задачу про мінімізацію ризику портфеля з одержанням заданого прибутку. Математична модель цієї задачі така.

$$\sigma_p^2 \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i m_i = m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Тут m – сподівана норма прибутку портфеля. Функція Лагранжа має вид:

$$L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} + \lambda_1 (\sum_{i=1}^{n} x_i m_i - m) + \lambda_2 (\sum_{i=1}^{n} x_i - 1)$$

Прирівнявши до нуля часткові похідні першого порядку функції L відносно цих змінних, одержимо наступну систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} 2\sigma_1^2 x_1 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_2 + \ldots + 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_n + m_1\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}x_1 + 2\sigma_2^2 x_2 + \ldots + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_n + m_2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\sigma_1\sigma_n\rho_{1n}x_1 + 2\sigma_2\sigma_n\rho_{2n}x_2 + \ldots + 2\sigma_n^2 x_n + m_n\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = m \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \end{cases}$$

Приклад. З використанням числової інформації прикладу 4 потрібно визначити частки акцій в пакеті з мінімальним ризиком і сподіваною нормою прибутку m=40%.

Розв‘язання. Система рівнянь для визначення часток x_1, x_2, x_3 акцій в пакеті має вид:

$$\begin{cases} 200x_1 + 80x_2 - 150x_3 + 30\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 80x_1 + 800x_2 - 400x_3 + 40\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -150x_1 - 400x_2 + 1250x_3 + 50\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 30x_1 + 40x_2 + 50x_3 = 40 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Її розв‘язок $x_1 = x_3 = 0,341; x_2 = 0,318$. Обчислюємо ризик пакета.

$$\sigma_p^2 = 0,341^2 \cdot 10^2 + 0,318^2 \cdot 20^2 + 2 \cdot 0,341 \cdot 0,318 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 0,2 -$$

$$-2 \cdot 0,341^2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0,3 + 0,341^2 \cdot 25^2 - 2 \cdot 0,318 \cdot 0,341 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 0,4 =$$

$$= 72,6108(\%)^2, \sigma_p = 8,5212\%$$

Отже, в пакет з мінімальним ризиком 8,5212% і сподіваною нормою прибутку 40% потрібно включити по 34,10% окцій першого і третього видів та 31,8% другого.

4. Загальні засади теорії портфеля, оптимізація його структури.

Подамо лише постановку та класичний розв'язок задачі.

Найкраще співвідношення між приростом норми прибутку і зростанням ризику забезпечує портфель ЦП.

$$\varphi = (m_p - R_F) / \sigma_P \qquad 4.1$$

за умови: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

Введемо обмеження до цільової функції φ. Для цього запишемо R_F, як:

$$R_F = 1 \cdot R_F = (\sum_{i=1}^{n} x_i) R_F = \sum_{i=1}^{n} x_i R_F \qquad 4.2$$

Зробимо підстановку, отримаємо:

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R_F)}{\sqrt{\sum x_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}} \qquad 4.3$$

Необхідно коефіцієнти x_i, максимізують цю функцію. Цього можна досягнути за допомогою коли взяти похідну функції по x і прирівняти до нуля.

$$\frac{d\varphi}{dx_S} = \sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R_F)(-(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{-\frac{3}{2}} \cdot (x_S \sigma_S^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_j)) + \\ + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{-\frac{1}{2}} (m_S - R_F) \qquad 4.4$$

перемножимо ліву і праву частини на:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij})^{-\frac{1}{2}}$$

одержимо:

$$-\underbrace{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (m_i - R_F)}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}} \right)}_{\lambda} (x_s \sigma_s^2 + \sum_{j=1}^{n} x_s \sigma_{sj}) + (m_s - R_F) = 0 \qquad 4.5$$

$$-\lambda (x_s \sigma_s^2 + \sum_{j=1}^{n} x_i \sigma_{sj}) + (m_s + R_F) = 0 \qquad 4.6$$

$\overline{S = 1, n}$

Введемо нові змінні:

$$y_s = \lambda x_s \qquad 4.7$$

підставимо в (4.6) і отримаємо:

$$x_s = \frac{y_s}{\sum_{s=1}^{n} y_s}, \qquad s = \overline{1, n} \qquad 4.8$$

Величини x_s визначають оптимальну структуру портфеля при заданому наборі ЦП і нормі прибутку R_F щодо паперу з фіксованим відсотком.

Проте при знаходженні розв'язків системи (4.6) деякі x_s, можуть бути від'ємними.

В цьому випадку:

1) або вважають, що $x_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ і розв'язують дану задачу методом квадратичного програмування;

2) або не накладають умови невід'ємності, вважають, що x_i означає, що відповідні цінні папери необхідно продати на термін без покриття, тобто при їх відсутності у продавця на час продажу. Це гра на пониження

В загальному вигляді задача щодо оптимального інвестування в цінні папери допускає як позику, так і надання кредитів.

Позика — збільшує ресурси для інвестування а кредит – інвестування під фіксований відсоток.

Для спрощення вважають, що і кредит і позика здійснюється за тим же відсотком R_F.

Припустимо, що інвестор вирішив вкласти частину своїх засобів у певний портфель E і крім цього надати кредит, чи взяти в борг під фіксований відсоток R_F.

Проаналізуємо:

Нехай x – частка від позичкового капіталу, котру інвестор розмісти у вигляді портфеля E. (x може бути і > 1, тобто користуються позичкою), тоді $(1 - x)$ – частка засобів розміщених під фіксований відсоток.

Тоді сподівана норма прибутку від комбінацій з позичково-кредитною операцією буде визначена:

$$m_p = (1 - x)R_F + xm_E \qquad 4.9$$

ризик $$\sigma = ((1-x)^2\sigma_F^2 + x^2\sigma_E^2 + 2x(1-x)\sigma_{EF})^{\frac{1}{2}}, \qquad 4.10$$

де $\sigma_F = 0$, і отже $\sigma_{EF} = 0$, тобто $\sigma_p = x\sigma_E$ ризик портфеля 4.11

Тоді $x = \sigma_p / \sigma_E$ а сподіваний прибуток:

$$m_p = R_F(1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_E}) + \frac{\sigma_p}{\sigma_E} m_E$$

$$m_p = R_F - \frac{m_E - R_F}{\sigma_E}\sigma_p \qquad 4.12$$

це є рівняння прямої і називається *лінією ринку капіталів* і характеризує портфелі, так із цінних паперів обмежених ризиком.

Коли відсутня позиково-кредитна операція, то x = 1, $m_p = m_E$, і $\sigma_p = \sigma_E$.

точка E лежить на MN (можна ефективних портфелів) і дотичній до цієї кривої прямій $R_F E$.

точкаE (σ_E, m_E) – називається ринковим портфелем.

На комбінації фінансового портфеля E із позичково-кредитними операціями з фіксованими відсотками вздовж прямої у просторі $\sigma_p - m_p$.

Відрізок $R_F E$ відображає рішення інвестувати певну частку власних засобів в портфель E, а іншу частку віддати у вигляді позички під фіксований відсоток R_F. Вздовж [*EK*] розташовані рішення щодо позички додаткових засобів, а весь сумарний капітал інвестується в портфель *E*.

<u>*Приклад.*</u> Норма прибутку безризикових цінних паперів складає 15%, сподівана норма прибутку ринкового портфеля 40%, він обтяжений ризиком $\sigma_E = 5\%$. Визначити сподівану норму прибутку інвестора при різних значеннях ризику.

$\sigma_P = 0\%$ $\quad m_p = 15 + \frac{40-15}{5}\sigma_p = 15$

$\sigma_P = 4\%$ $\quad$ *mp = 35*

$\sigma_P = 10\%$ $\quad$ *mp = 65.*

5. Спрощена класична модель формування портфеля.

Найпростішою математичною моделлю наближених розрахунків є однофакторна модель Вільяма Шарпа.

Ця модель на залежності норм прибутків більшості акцій від одного чинника - чинника ринку (біржі).

В основному при зростанні ринкових індексів зростають і ціни більшості акцій і навпаки. Це дозволяє висунути гіпотезу про те, що норми прибутків акцій щільно корельовані відносно загального біржового індексу.

Цей індекс можна трактувати як, гіпотетичний цінний папір, ціна якого коливається і для якого можна визначити норму прибутку та варіацію.

Кореляційна залежність норми прибутку звичайної акції від норми прибутку індексу має вигляд:

$$m_i = a_i + \beta_i m_m + e_i \qquad 5.1$$

де : m_m -сподівана норма прибутку ринку ;

a_i - параметри рівняння регресії;

β_i - випадкова складова (випадкові чинники) .

Це формула харектиристичної лінії цінного паперу.

Важливою складовою є β_i - коефіцієнт бета – вказує на скільки відсотків наближено зросте чи знизиться норма прибутків акцій, коли норма прибутку ринку зросте (знизиться) на 1%. Тобто, це означає, що коефіцієнт β певної акції показує, в якій мірі норма прибутку акції реагує на зміни що відбуваються на ринку в цілому. Коефіцієнт β може трактуватись як міра ринкового ризику певної акції.

Наведемо кілька простих прикладів:

1. β_i=0 – норма прибутку даного цінного паперу ніяк не реагує на зміни на ринку, тобто не обтяжений ринковим ризиком (державна облігація).

2. 0<β_i<1 – досить поміркованo реагує на зміни що відбуваються на ринку цінних паперів – називається дефективною (захищеною) акцією.

3. β_i=1 - норма прибутку даної акції змінюється так само як і норма прибутку ринку.

4. $\beta_i > 1$ – норма прибутку акції значною мірою залежить від змін на ринку. Таку акцію називають агресивною.

В розвинутих країнах ряд журналістів друкують β багатьох акцій.

Приклад.

Візьмемо акцію, характеристична лінія котрої подана наступним рівнянням:

$$m_i = 3{,}1 + 1{,}3 m_M + e_i$$

Наведене рівняння показує, що зміна ринкового (біржового) показника на 1% призводить до зміни норми прибутку даної акції приблизно на 1,3%. Тобто, ця акція значно реагує на зміни ринку ЦП.

Отже чим більший β - тим більший ступінь реагування норми прибутку акцій на зміни норм прибутку ринку.

Важливим завданням є визначення х-оні лінії цінного паперу. Для того використовують інформацію за минулі періоди та метод найменших квадратів.

У випадку застосування м н к (не вдаючись в деталі) одержимо наступні рівняння для визначення α та β:

$$\beta_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_M)}{D(R_M)} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - m_i)(R_{Mt} - m_M) / (T-1)}{\sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - m_M)^2 / (T-1)} \qquad 5.2$$

$$\alpha_i = m_i - \beta_i m_M \qquad 5.3$$

де $\operatorname{cov}(R_i, R_м)$ – коваріація між i-ю акцією і нормами прибутку ринку;

$D(R_м)$ – дисперсія ринкової норми прибутку ЦП,

T – кількість періодів, за які береться відповідна інформація,

R_{it} – норма прибутку i-ї акції в t-му періоді;

$R_{мt}$ – норма прибутку показника ринку в t-му періоді,

m_i – сподівана норма прибутку i-ї акції,

$m_м$ – сподівана ринкова норма прибутку.

У даному випадку:

Сподівані прибутки акції і ринку

$$m_i = (\sum_{t=1}^{T} R_{it}) / T \qquad 5.4$$

$$m_м = (\sum_{t=1}^{T} R_{мt}) / T \qquad 5.5$$

дисперсія показника ринку

$$D_м = \sum_{t=i}^{T} (R_{мt} - m_м)^2 / (T-1) \qquad 5.6$$

дисперсія випадкової складової, що відповідає i-й акції

$$\sigma_{e_i}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \alpha_i - \beta_i R_{Mt})^2}{T-1} \qquad 5.7$$

Дана модель дає можливість обчислити показники залежності:

$$m_i = a_i + \beta_i m_м \qquad 5.8$$

$$D_i = \sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{e_i}^2 \qquad 5.9$$

$$\rho_{ij} = (\beta_i \beta_j \sigma_M^2) / \sigma_i \sigma_j \qquad 5.10$$

$$z_i = \frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\sigma_i^2} \qquad 5.11$$

m_i – норма прибутку i-ї акції,

D_i – дисперсія i-ї акції;

$\sigma_{e_i}^2$ – дисперсія випадкової складової, що відповідає i-й акції;

ρ_{ij} – коефіцієнт кореляції i-ї та j-ї акції;

z_i – частка систематичного ризику в загальному ризику i-ї акції.

Формула (5.10) вказує, що ризик акції яким вона обтяжена, може бути представлена сумою двох складових. Перша складова, що залежить від варіації показника ринку, відображає ризик ринку – систематичний ризик. Друга складова, будучи варіацією випадкової складової, відображає специфічний ризик, що пов'язаний з даною акцією.

Поняття систематичного ризику (ризику ринку) і специфічного ризику має безпосередній зв'язок з диверсифікацією.

Вміла методика формування портфеля дозволяє суттєво знизити специфічний ризик. Однак залишається ризик ринку, який може мати певний ступінь в складі всіх акцій портфеля, вилучити потрібні вдається шляхом диверсифікації.

Необхідно зазначити: якщо певну фірму трактувати як множину окремих груп активів, то користуючись викладеним вище, можна обчислити вплив інвестиційних проектів на β фірми в цілому. А, отже на систематичний ризик, ціну власного капіталу, а також середньозважену ціну капіталу.

У. Шарп запропонував модель, в якій цінні папери та їх поведінка порівнюються з поведінкою ринку в цілому. Модель заснована на припущенні, що операції з будь-якими цінними паперами мають приблизно однакову прибутковість. Якщо прибутковості будь-яких цінних паперів починають відрізнятися від середньоринкових показників, це вказує на зміну їх інвестиційної привабливості в порівнянні з ринком в цілому. Залежно від значення запропонованих індикаторів даються рекомендації, що треба робити з цими цінними паперами: купувати, продавати чи тримати. Шарп ввів такі параметри:

• коефіцієнт β - показник, який представляє собою ковариацию між поведінкою даної цінних паперів і поведінкою ринку в цілому, зважену на ступінь її ризику по відношенню до ризику ринку в цілому;

• коефіцієнт α - показник, що характеризує зміщення прибутковості даної цінного паперу (m_i) щодо середньоринкового значення (m_M). Співвідношення між цими величинами має вигляд $m_i = \alpha + \beta \cdot m_M$;

• коефіцієнт кореляції доходностей цінних паперів і ринку ρ, який є для моделі допоміжним параметром.

Рекомендації з купівлі-продажу цінних паперів, які дає ця індексна модель, полягають у наступному:

1) купувати слід, якщо цінний папір недооцінений (α <0) і проти падаючого ринку і β <0 або по зростаючому ринку і β> 0;

2) продавати слід, якщо цінний папір переоцінений (α> 0) і по падаючому ринку і β> 0 або проти зростаючого ринку і β <0.

При цьому необхідно, щоб ρ > 0. У всіх інших випадках цінні папери слід тримати.

На західних ринках значення α, β і R^2 регулярно розраховуються для всіх цінних паперів і публікуються разом з індексами. Користуючись цією інформацією і здійснюючи операції купівлі-продажу, інвестор може сформувати власний портфель цінних паперів.

Приклад.

Відомі норми прибутків акції та ринку за 10 років. Обчислити основні параметри моделі Шарпа.

Період	Норма прибутку, %	
	акції, R_i	ринку, $R_м$
1	3	4
2	18,2	14,3
3	9,1	19
4	–6	–14,7
5	–15,3	–26,5
6	33,1	37,2
7	6,1	23,8
8	3,2	–7,2
9	14,8	6,6
10	13,8	13,5

Розв‘язання. Обчислимо сподівані норми прибутку акції та ринку за формулами 5.4 та 5.5:

m_i = (3 + 18,2 + 9,1 +(–6) + (–15,3) + 33,1 + 6,1 + 3,2 + 14,8 + 13,8)/10 =
= 80/10 = 8%;

m_M = (4 + 14,3 + 19 + (–14,7) + (–26,5) + 37,2 + 23,8 + (–7,2) + 6,6
+ 13,5)/10 = 70/10 =7%.

Побудуємо допоміжну таблицю для розрахунку коефіцієнтів α_i та β_i :

t	$R_{it} - m_i$	$R_{мt} - m_м$	$(R_{it} - m_i)(R_{мt} - m_м)$	$(R_{мt} - m_м)^2$
1	–5	–3	15	9
2	10,2	7,3	74,46	53,29
3	1,1	12	13,2	144
4	–14	–21,7	303,8	470,89
5	–23,3	–33,5	780,55	1122,25
6	25,1	30,2	758,02	912,04
7	–1,9	16,8	–31,92	282,26
8	–4,8	–14,2	68,16	201,64
9	6,8	–0,4	–2,72	0,16
10	5,8	6,5	37,7	42,25
		Сума	2016,25	3237,76

Таким чином, та β_i = 2016,25/3237,76 = 0,623; α_i = 8 – 0,623·7 = 3,639.

Обчислимо варіацію випадкової складової за формулою 5.7. Побудуємо допоміжну таблицю:

t	R_i	$R_м$	$R_{it} - \alpha_i - \beta_i R_{мt}$	$(R_{it} - \alpha_i - \beta_i R_{мt})^2$
1	3	4	–3,131	9,803
2	18,2	14,3	5,652	31,945
3	9,1	19	–6,376	40,653
4	–6	–14,7	–0,481	0,231
5	–15,3	–26,5	–2,429	5,9
6	33,1	37,2	6,285	39,501
7	6,1	23,8	–12,366	152,918
8	3,2	–7,2	4,047	16,378
9	14,8	6,6	7,049	49,688
10	13,8	13,5	1,75	3,062
			Сума	350,079

$$\text{Отже, } \sigma^2_{e_i} = \frac{350,079}{9} = 38,898.$$

Таким чином, характеристична лінія цінного паперу, тобто акції має вигляд

$$m_i = 3,639 + 0,623 m_M .$$

Частка систематичного ризику становить:

$$z_i = \frac{\beta_i^2 \sigma_M^2}{\sigma_i^2} = \frac{0,623^2 \cdot 3237,76}{0,623^2 \cdot 3237,76 + 350,079} = \frac{1256,669}{1606,748} = 0,78 ,$$

оскільки 0,78 > 0,5, то можна стверджувати, що поводження ринку цінних паперів має великий вплив на ризик, яким обтяжена дана акція. крім того, можна стверджувати, що дана залежність якісно характеризує залежність між нормами доходу акції та ринку.

Приклад. На основі даних за минулі періоди двох акцій обчислені такі величини:

$$\beta_1 = 0{,}5;\ \alpha_1 = 4{,}5;\ \sigma_{e_1}^2 = 0{,}2;$$
$$\beta_2 = 1{,}2;\ \alpha_2 = 2{,}5;\ \sigma_{e_2}^2 = 0{,}3;$$
$$m_м = 10\%;\ \sigma_M^2 = 0{,}6.$$

Обчислити норми прибутку, ризик обох акцій коефіцієнт кореляції та визначити акцію, яка є більш залежною від ринку.

Розв‘язання. Сподівані норми прибутків для кожної з акцій рівні:

$m_1 = \alpha_1 + \beta_1\, m_м = 4{,}5 + 0{,}5\cdot 10 = 9{,}5\%;$

$m_2 = \alpha_2 + \beta_2\, m_м = 2{,}5 + 1{,}2\cdot 10 = 14{,}5\%.$

Варіації кожної з акцій рівні

$$D_1 = \sigma_1^2 = \beta_1^2\sigma_M^2 + \sigma_{e_1}^2 = (0{,}5)^2\cdot 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}35;$$

$$D_2 = \sigma_2^2 = \beta_2^2\sigma_M^2 + \sigma_{e_2}^2 = (1{,}2)^2\cdot 0{,}6 + 0{,}3 = 1{,}164.$$

Ризики кожної з акцій будуть:

$$\sigma_1 = \sqrt{0{,}35} = 0{,}592;\ \sigma_2 = \sqrt{1{,}164} = 1{,}079.$$

Таким чином, другий вид акції має більший сподіваний прибуток, проте вона обтяжена більшим ризиком.

Коефіцієнт кореляції між цими акціями рівний:

$\rho_{12} = \dfrac{\beta_1\beta_2\sigma_M^2}{\sigma_1\sigma_2} = \dfrac{0{,}5\cdot 1{,}2\cdot 0{,}6}{0{,}592\cdot 1{,}079} = 0{,}639,$ тобто між цими акціями існує вище середнього лінійний зв'язок.

щоб визначити, яка акція більш залежна від ринку визначимо частку систематичного ризику для кожної з них.

$$z_1 = \frac{\beta_1^2\sigma_M^2}{\sigma_1^2} = \frac{(0{,}5)^2\cdot 0{,}6}{0{,}35} = 0{,}428;$$

$$z_2 = \frac{\beta_2^2\sigma_M^2}{\sigma_2^2} = \frac{(1{,}2)^2\cdot 0{,}6}{1{,}164} = 0{,}742.$$

Оскільки $z_2 > z_1$, то акція другого виду більш залежна від ринку стосовно ризику.

КПІЗ з «Теорія портфеля»

1. Визначити оптимальний портфель акцій трьох видів, якщо інвестор хоче вкласти в акції з такими числовими характеристиками:

$m_1 = (K+N)/(\text{номер групи})\%$; $\sigma_1 = (\text{номер групи})\%$;

$m_2 = (K–N)/(\text{номер групи}+10)\%$; $\sigma_2 = N\%$;

$m_3 = K/N\%$; $\sigma_3 = K\%$;

$r_{12} = K/(2(K–N))$; $r_{13} = K/(2(K+N))$; $r_{23} = –N/(K+N)$.

2. Визначити оптимальний портфель акцій трьох видів, якщо інвестор хоче вкласти в акції з такими числовими характеристиками:

$m_1 = (K+N)/(\text{номер групи})\%$; $\sigma_1 = (\text{номер групи})\%$;

$m_2 = (K–N)/(\text{номер групи}+10)\%$; $\sigma_2 = N\%$;

$m_3 = K/N\%$; $\sigma_3 = K\%$;

$r_{12} = K/(2(K–N))$; $r_{13} = K/(2(K+N))$; $r_{23} = –N/(K+N)$,

а очікуваний прибуток портфеля $m_p = (K+4N)/ N\%$.

3. Визначити оптимальний портфель акцій трьох видів, якщо інвестор хоче вкласти в акції з такими числовими характеристиками:

$m_1 = (K+N)/(\text{номер групи})\%$; $\sigma_1 = (\text{номер групи})\%$;

$m_2 = (K–N)/(\text{номер групи}+10)\%$; $\sigma_2 = N\%$;

$m_3 = K/N\%$; $\sigma_3 = K\%$;

$r_{12} = K/(2(K–N))$; $r_{13} = K/(2(K+N))$; $r_{23} = –N/(K+N)$,

а крім того він планує залучити до портфеля безризиковий актив, норма прибутку якого $R_F = K/2$ %.

У задачі N — номер по списку, K — дві останні цифри залікової книжки (не враховуючи рік вступу)