2. ВИЗНАЧЕННЯ БАР'ЄРНИХ ЗНАЧЕНЬ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ

1. Загальна постановка задачі. Лінійна модель

У практиці фінансово-економічного аналізу досить часто виникає необхідність визначити бар'єрне (порогове, критичне, гранично допустиме) значення деякого параметра. Під бар'єрним значенням параметра розуміють таку його величину, перевищення якої призводить до позитивного або, навпаки, негативного кінцевого економічного результату в рамках деякої виробничої або фінансової системи. Наприклад, якщо мова йде про визначення обсягу виробництва якогось продукту, то граничним його значенням є такий обсяг випуску, при якому отриманий прибуток дорівнює нулю. Перевищення цього обсягу дає прибуток, виробництво в меншому обсязі виявляється збитковим. Подібна і багато інших, подібні по загальній постановці, завдання вирішуються за допомогою методу бар'єрної або критичної точки (*break-even point*). Метод бар'єрної точки широко використовується в фінансовому проектуванні, при розробці бізнес-планів та при вирішенні різноманітних проблем: при визначенні порогового значення процентної ставки, ціни товару, терміну виконання фінансової операції і т.д.

Найбільш проста постановка задачі здійснюється за допомогою лінійної моделі, яка і розглядається в даному параграфі. Зрозуміло, така постановка не є єдино можливою. Деякі шляхи для подальшого розвитку методу пропонуються в наступних пунктах.

Зауважимо, що до недавнього часу метод бар'єрної точки застосовувався, так би мовити, в статиці. Економічні показники розглядалися в рамках одного, порівняно короткого періоду. Останнім часом цей метод поширюється і на потоки платежів, що охоплюють ряд послідовних часових інтервалів. У цих випадках за допомогою дисконтування став враховуватися найважливіший фактор — час (а саме, терміни інвестування і терміни віддачі від інвестицій).

Для початку розглянемо найбільш простий і вельми умовний варіант статичної постановки завдання, до якого зазвичай вдаються при поясненні суті методу. Нехай необхідно знайти пороговий обсяг виробництва одного виду продукту за умови, що всі необхідні для аналізу кількісні залежності описуються лінійними виразами, інакше кажучи, застосовується лінійна модель.

Для запису такої моделі приймемо позначення:

Q — обсяг виробництва (в натуральному або умовно-натуральному вимірі);
F — постійні виробничі витрати (витрати, які не залежать від обсягу випуску);
c – змінні, або пропорційні витрати (в розрахунку на одиницю продукції);
p — ціна одиниці продукції;
S — загальна сума витрат;
V — вартість випущеної продукції;
P — розмір прибутку до сплати податків.

Змінні Q, F, S, V, P визначаються за однаковий інтервал часу, зазвичай за один рік.

Спочатку знайдемо вартість випущеної продукції і відповідну суму витрат:

$$V = P \cdot Q, \tag{1}$$

$$S = F + cQ \tag{2}$$

Шуканий критичний обсяг виробництва або бар’єрну точку отримаємо, прирівнявши вартості випущеної продукції і суми витрат: $V = S$. Саме рівність двох різнорідних економічних показників, кожен з яких є функцією однієї керуючої змінної (у нашому випадку — обсягу виробництва), лежить в основі методу бар’єрної точки.

Позначимо бар’єрний обсяг виробництва як Q_k, тоді, використовуючи (1) і (2), отримаємо

$$pQ_k = cQ_k + F.$$

Таким чином,

$$Q_k = \frac{F}{p-c} \tag{3}$$

Як бачимо, чим більші постійні і змінні витрати, тим більше значеннякритичного обсягу виробництва.

Прибуток (до виплати податків) за визначенням складе

$$P = V - S = (p - c)\,Q - F \tag{4}$$

Графічна ілюстрація постановки задачі і її розв’язок наведені на рис.1. Розв’язок знаходиться в точці перетину двох ліній, одна з яких характеризує динаміку витрат (S), інша — зміна доходу (V) в залежності від збільшення випуску. Обсяги виробництва, які менше критичного Q_k, приведуть до збитків. Перевищення цього обсягу дає прибуток. Чим вище розмір постійних і змінних витрат, тим більше значення критичний обсяг виробництва. Чистий прибуток після сплати податків (пропорційних прибутку) характеризується лінією M.

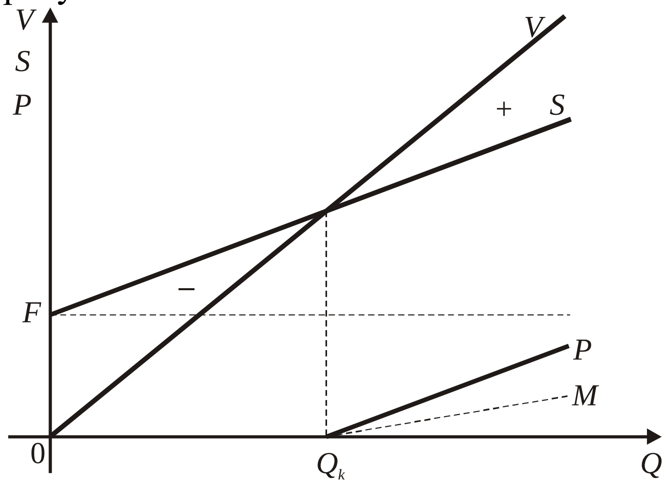

Рис. 1

***ПРИКЛАД* 1**. Очікується що $p = 50$, $c = 30$, $F = 100$. Знаходимо

$$Q_k = \frac{100}{50-30} = 5,\;\; P = (50 - 30)\cdot Q - 100 = 20Q - 100$$

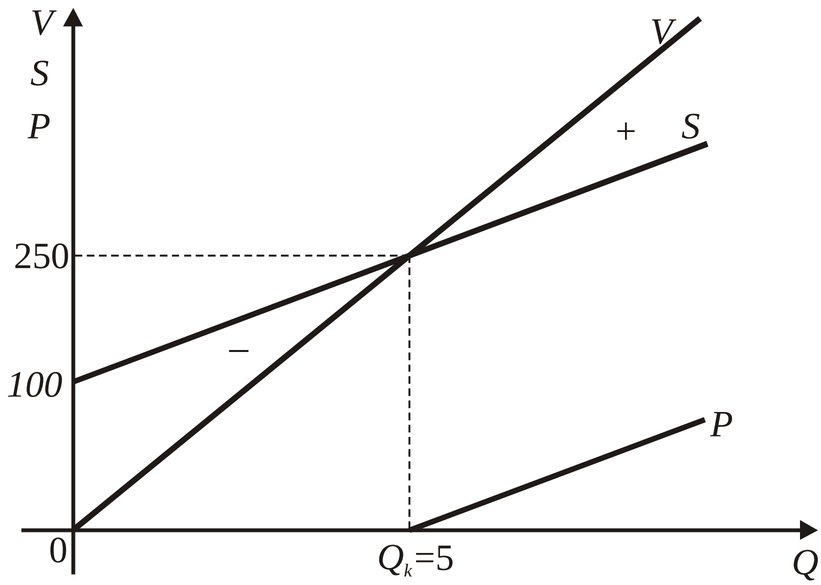

Рис. 2

Розглянутий метод базується на реальних даних бухгалтерського обліку або очікуваних їх величин. Капіталовкладення враховуються, включаючи їх у витрати амортизаційних відрахувань.

Зауважимо, що всі параметри розглядають як константи. Тим часом, з плином часу вони безумовно змінюються і знайдена для одного моменту часу критична точка не буде для іншого моменту. Важливо також підкреслити, що час, як найважливіший фінансовий фактор, не враховується. Такий підхід цілком виправданий, якщо капіталовкладення вже здійснені і виникає питання тільки про вибір видів виробленої продукції і їх обсягів.

Таким чином, можна сформулювати загальне визначення методу, як способу розрахунку бар'єрного значення керуючої змінної, виходячи з рівності двох «конкуруючих» функцій цієї змінної. Зміст керуючого параметра і функцій, як бачимо, визначається конкретними умовами розв'язуваної задачі. У розглянутому вище прикладі керуючою змінною є обсяг виробництва, «конкуруючими» функціями — дохід (виручка) і витрати.

2. Нелінійні моделі

Лінійна модель у багатьох випадках дає практично адекватний опис ситуації. Однак можуть мати місце ситуації, коли процес формування витрат та/або вартості продукції більш адекватно описується нелінійними функціями і є достатньо достовірні дані для отримання відповідних кривих. Вид і параметри таких кривих можуть бути встановлені, наприклад, в ході статистичного аналізу або їх можна задати експертно.

Бар'єрний випуск продукції. Повернемося до задачі визначення критичного обсягу продукції, але в умовах, коли одна або обидві «конкуруючих» функції є нелінійними. Обмежимося двома з можливих постановок задачі. Нехай для початку вартість продукції — лінійна функція випуску, а витрати на виробництво описуються нелінійною, монотонно зростаючою функцією. Інакше кажучи, передбачається, що питомі витрати скорочуються в міру зростання масштабів виробництва, а ціна одиниці продукції не змінюється. Таке поєднання витрат і вартості продукції представлено на рис. 3.

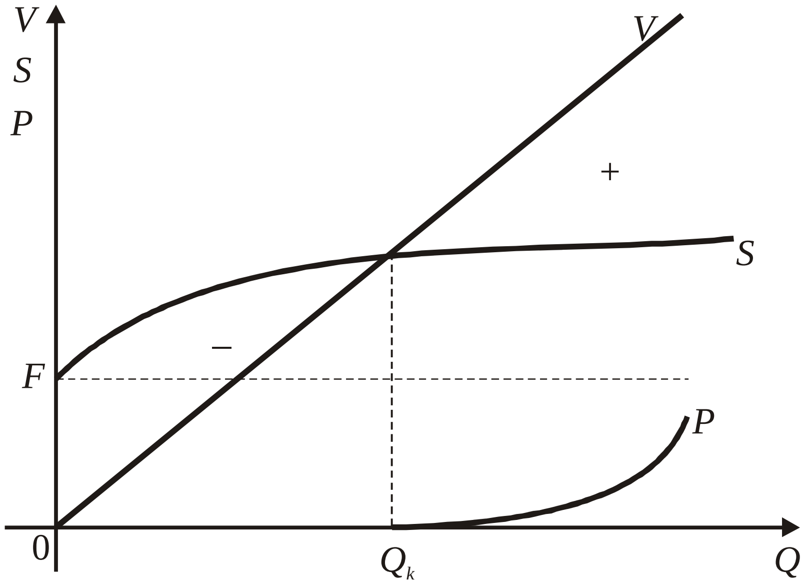

Рис. 3

Завдання, як і вище, полягає у визначенні бар'єрного рівня випуску продукції. Вартість продукції знаходиться за формулою (1), а сума змінних витрат описується, припустимо, степеневою функцією cQ^h, причому $0 < h < 1$. В цьому випадку загальна сума витрат складе

$$S = F + cQ^h$$

Різниця «конкуруючих» функцій в бар'єрній точці дорівнює нулю:

$$pQ_k - cQ_k^h - F = 0.$$

Розвязок зводиться до знаходження кореня цього рівняння.

***ПРИКЛАД* 2.** Вихідні дані: $F = 100$, $p = 50$, $c = 40$, $h = 0{,}5$. Відповідно маємо

$$50Q_k - 40Q_k^{0,5} - 100 = 0.$$

Знайдемо корені цього рівняння. Для цього перетворимо його в квадратне рівняння, ввівши заміну $Q = z^2$. Отримаємо

$$50z^2 - 40z - 100 = 0.$$

Додатній корінь дорівнює 1,86 дорівнює Таким чином $Q = 1{,}86^2 = 3{,}46$.

Розглянемо поєднання двох нелінійних залежностей. Наприклад, нехай обидві функції є параболами (див. Рис. 4).

Тоді

$$V = aQ^2 + bQ,\ S = cQ^2 + dQ + F,$$

де a, b, c, d — параметри парабол.

Прибуток в залежності від рівня випуску складе

$$P = (a - c)Q^2 + (b - d)Q - F. \quad (5)$$

Бар'єрний обсяг випуску знаходиться як корінь квадратного рівняння

$$(a - c)Q_k^2 + (b - d)Q_k - F = 0$$

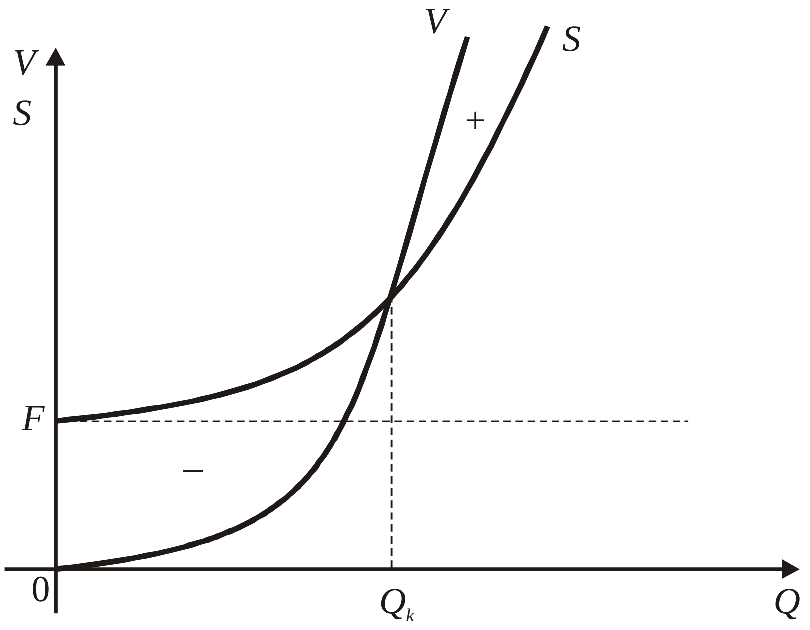

Рис. 4

Зауважимо, що за деяких умов можна розрахувати обсяг випуску, який максимізує розмір прибутку (позначимо його як Q_m). Для цього, як відомо, досить знайти похідну функції прибутку і прирівняти її нулю. У разі, коли прибуток описується виразом (5), знаходимо

$$Q_m = \frac{d-b}{2(a-c)}. \tag{7.6}$$

Як бачимо, положення точки максимуму повністю визначається параметрами відповідних парабол. Причому необхідною умовою існування максимуму є наступні співвідношення: $d > b$, $a > c$. Якщо ж $b > d$ і $a > c$, то прибуток монотонно зростає разом зі збільшенням випуску.

Нелінійну модель можна представити і в неформализованном вигляді - як таблицю даних, що характеризують витрати і вартість продукції в залежності від обсягу випуску.

ПРИКЛАД **3.** У наведеній нижче таблиці і на діаграмі вказані дані про витрати, вартості продукції і очікуваного прибутку.

Q	***F***	***c***	***p***	***S***	***V***	***P***
0	100	-	-	100	-	-
5	100	30	50	**250**	**250**	**0**
10	100	27	50	370	500	130
15	100	22	45	430	675	145
20	100	20	40	500	800	**300**
25	100	20	30	600	750	150

Найбільший прибуток, як видно з обчислень, отримано, якщо випуск дорівнює 20.

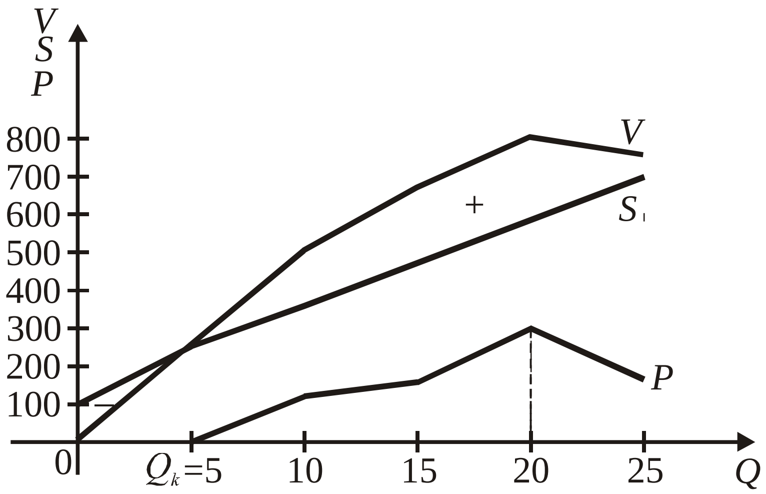

Рис. 5

3. Бар'єрні показники у фінансовому аналізі

Порівняння грошових сум. Почнемо з розв'язання простої задачі, що ілюструє можливості методу при вирішенні деяких проблем фінансів і кредиту. Припустимо, необхідно вибрати один з двох варіантів надходжень грошових коштів, що розрізняються сумами і термінами: S_1, S_2 з термінами n_1 і n_2, причому $S_2 > S_1$, $n_2 > n_1$ (інакше задача не має економічного сенсу). Логічно виправдано вибір обґрунтувати, порівнюючи теперішні вартості надходжень. Таким чином, результат вибору залежить від очікуваного ринкового рівня процентної ставки. Бар'єрною в розглянутій задачі є ставка, при якій обидва варіанти виявляються еквівалентними.

Розглянемо метод розв'язання для двох варіантів розрахунку сучасних вартостей: за простою і складною відсотковими ставками. Для простої ставки маємо наступну рівність теперішніх вартостей:

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_k} = \frac{S_2}{1+n_2 i_k}, \tag{7}$$

а для складної ставки:

$$S_1(1+i_k)^{n_1} = S_2(1+i_k)^{n_2}. \tag{8}$$

В обох рівностях i_k означає величину бар'єрної ставки. Розв'язавши рівняння (7) щодо шуканої ставки, отримаємо

$$i_k = \frac{S_2 - S_1}{S_1 n_2 - S_2 n_1}. \tag{9}$$

З останнього виразу випливає необхідна умова для існування бар'єрної ставки $S_1 n_2 > S_2 n_1$, $S_1 > S_2 \dfrac{n_1}{n_2}$.

Графічна ілюстрація розв'язку представлена на рис. 6.

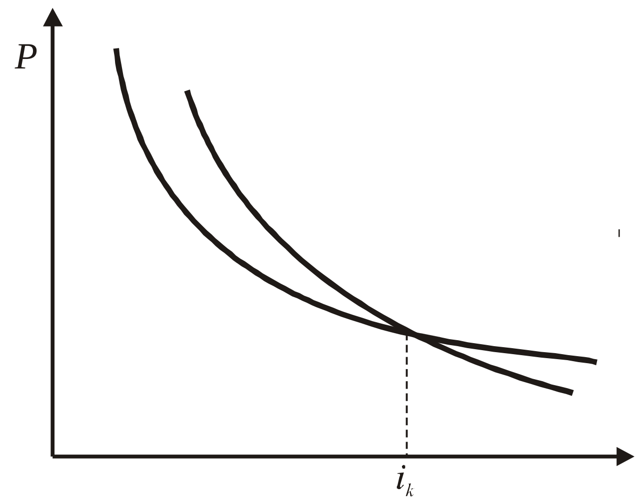

Рис. 6.

Якщо очікуваний рівень ставки менше бар'єрного, то для одержувача грошей кращий варіант S_2, якщо ж ринкова ставка більша бар'єрної, то слід зупинитися на альтернативному варіанті.

ПРИКЛАД 4. Порівняємо два варіанти платежів з параметрами: S_1 = 1тис. грн; S_2 = 1,15 тис. грн; n_1 = 7; n_2 = 12 (терміни платежів вказані в місяцях).

Спочатку перевіримо: якщо $S_1 > 1{,}15\frac{7}{12}$, тоді розв'язок існує. Далі отримаємо

$$i_k = \frac{1{,}15 - 1}{1 \cdot \frac{12}{12} - 1{,}15 \cdot \frac{7}{12}} = 0{,}4557, \quad \textit{або} \quad 45{,}6\%.$$

Таким чином, при ринковій ставці, яка менше ніж 45,6%, для одержувача грошей краще більш віддалена виплата при всіх інших рівних умовах.

Перейдемо до визначення бар'єрного значення складної ставки. На основі (8) знаходимо

$$(1 + i_k)^{n_2 - n_1} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Звідки

$$i_k = \sqrt[(n_2 - n_1)]{S_2 / S_1} - 1. \tag{10}$$

ПРИКЛАД .5. Можливі два варіанти оплати товару при його поставці. Вартість і терміни поставки: S_1 = 1 тис. грн; S_2 = 1,4 тис. грн; n_1 = 1; n_2 = 2,5 (терміни і в роках). Покупцеві необхідно вибрати варіант покупки за умови, що термін не має вирішального значення, іншими словами, він повинен орієнтуватися тільки на величину виплат.

Знаходимо величину бар'єрної ставки, при якій дисконтовані розміри витрат будуть однаковими: $i_k = \sqrt[(2{,}5-1)]{1{,}4 / 1} - 1 = 1{,}251 - 1 = 0{,}251,\ \textit{або}\ 25{,}1\%.$

Отже, якщо ринкова ставка буде менше 25,1%, то для покупця виявиться краще другий варіант.

Вибір варіанту депозиту. Метод визначення бар'єрної точки з використанням кривої прибутковості при виборі варіанту депозиту з найбільшою прибутковістю розглянемо на основі кривих дохідності.

Як вже зазначалось, процентна ставка є вимірником дохідності фінансової операції. Її значення залежить від багатьох факторів. Для практика важливо уявити собі закономірність зміни величини прибутковості (або процентних ставок, що використовуються в однорідних за змістом операціях), в залежності від деяких фундаментальних факторів. Ймовірно, найбільш важливим з них є ризик неповернення вкладених коштів. Очевидно також, що подібного роду ризик істотно залежить від терміну позики. Так, при всіх інших рівних умовах позика на 5 років більш ризикована, ніж, скажімо, на 2 роки. Компенсувати ризик власнику грошей може підвищення очікуваної прибутковості, договірної процентної ставки. Таким чином, залежність «прибутковість - ризик» наближено можна охарактеризувати за допомогою залежності «прибутковість – термін», отримати яку для практичних цілей істотно простіше. Таку залежність, представлену у вигляді графіка, називають кривою прибутковості (*yield curve*). На графіку по вертикалі відкладають прибутковість (*Y*), по горизонталі — термін (*i*). Якщо графік охоплює широкий діапазон термінів (як короткострокові, так і довгострокові операції), що теж практикується, то для вимірювання терміну застосовують логарифмічну шкалу.

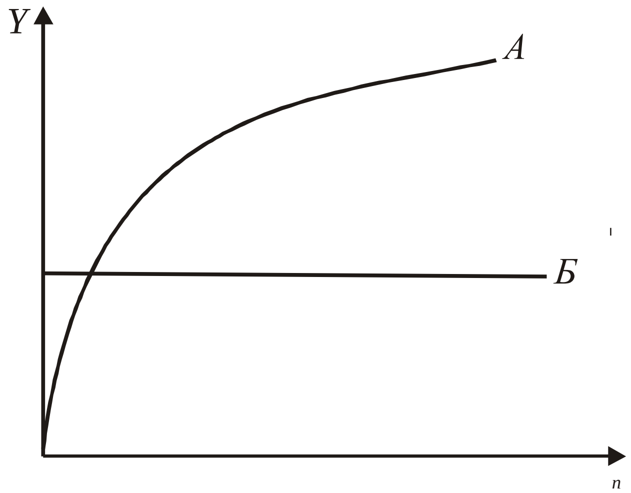

Рис. 7.

Криві дохідності зазвичай будуються окремо для коротко-, середньо- та довгострокових операцій і однорідних кредитно-позичкових операцій і фінансових інструментів. Спостережувані значення прибутковості зазвичай знаходяться близько кривої або безпосередньо на ній. Конкретна крива прибутковості відповідає реальній ситуації, що склалася на грошово-кредитному ринку, і характерна для короткого часового періоду. Зміна ситуації змінює форму кривої і її положення на графіку. У ряді західних періодичних фінансових видань регулярно наводяться такі криві.

Для нормальних економічних умов крива дохідності має форму кривої *А*: прибутковість (*Y*) тут зростає в міру збільшення терміну. Причому кожна наступна одиниця приросту терміну дає все менше збільшення прибутковості. Таку криву називають додатньою, або нормальною кривою прибутковості (*pozitive, normal yield curve*). Нормальна форма кривої (не слід плутати з кривою нормального розподілу, що використовується в статистиці) спостерігається в умовах, коли інвестори враховують такі чинники, як зростання невизначеності фінансових результатів (ризику) при збільшенні терміну.

Крива прибутковості, близька до горизонтальної прямої (лінія *Б*), вказує на те, що інвестори не беруть до уваги або мало враховують ризик, пов’язаний з терміном.

Іноді зустрічаються «негативні» і «згорблені» криві (*humped yield curve*) прибутковості. Перша з названих кривих відповідає зменшенню прибутковості фінансового інструменту в міру збільшення терміну (висока нестабільність ринку, очікування підвищення процентних ставок), друга — падіння прибутковості після деякого її зростання.

Існують кілька конкуруючих або, скоріше, доповнюючих теорій, що пояснюють закономірності «поведінки» кривих прибутковості. Зупинимося на двох з них: теорії ліквідності (*liquidity preference theory*) і теорії очікувань (*expectations theory*). Згідно з першою зміни прибутковості зв’язуються зі збільшенням ризику ліквідності інструменту у відносно короткі терміни. Друга зі згаданих теорій стверджує, що форма кривої може розглядатися як узагальнена характеристика очікувань інвесторів, вірніше, їх поведінки в поточний момент в зв’язку з очікуваннями змін процентних ставок в майбутньому. Однак інтерпретація форми кривої в цьому плані неоднозначна, та й не може бути іншою, оскільки доводиться брати до уваги принаймні дію двох факторів: ризик і очікування змін ставок. Наприклад, додатня крива може вказувати на те, що інвестори очікують зростання ставок в майбутньому. Іноді ця ж форма кривої вважається ознакою відносної стабільності грошово-кредитного ринку.

Криві дохідності набули широкого поширення як інструмент аналізу, що допомагає при розв’язанні ряду інвестиційних проблем, зокрема, при порівнянні прибутковості декількох фінансових інструментів, коригуванні портфеля активів і т.д.1

ПРИКЛАД 6. Розглянемо на умовному прикладі один з простих способів застосування кривої прибутковості стосовно розрахунку процентної ставки. Припустимо, інвестор повинен інвестувати деяку суму грошей на 4 роки. Причому в силу ряду причин у нього є тільки два варіанти для цього: розмістити цю суму на депозитах відразу на весь термін або спочатку на 3 роки, а потім на 1 рік. Нехай значення ставок відповідаютьнормальній кривій прибутковості: за трирічними депозитах — 10%, по чотирирічним — 10,5% складних річних. Розмір ставки для депозиту на останній рік в момент прийняття рішення, зрозуміло, невідомий. Який варіант розміщення коштів повинен вибрати інвестор? Очевидно, що для того щоб зупинитися на другому варіанті, він повинен очікувати результат не гірше, ніж при першому варіанті.

Завдання, отже, зводиться до визначення того значення ставки для 4-го року, при якому обидва варіанти будуть рівноцінними у фінансовому відношенні.

Позначимо через i_3 і i_4 процентні ставки для депозитів на 3 та 4 роки, а через i_0 — невідому ставку для річного депозиту. В силу фінансової еквівалентності результатів розміщення засобів множники нарощення для обох варіантів повинні бути рівними. Звідси $(1 + i_4)^4 = (1 + i_3)^3 \cdot (1 + i_0)$.

За даними прикладу знаходимо ставку

$$i_0 = \frac{(1+i_4)^4}{(1+i_3)^3} - 1 = \frac{1{,}105^4}{1{,}1^3} - 1 = 0{,}12014, \text{ або } 12{,}014\%.$$

Таким чином, для того щоб інвестор зупинився на другому варіанті, він повинен очікувати, що через 3 роки ставка по однорічним депозитах буде не менше 12,014%, тобто рівень ставок підвищиться. Відповідно, якщо він очікує, що ставка не досягне цього рівня, слід вибрати перший варіант.

Додаткові приклади застосування методу бар'єрної точки в фінансовому аналізі будуть розглянуті в інших розділах.

4. Способи визначення бар'єрних показників.

Слід зазначити, що поточні затрати і поступлення від реалізації продукції можна представляти у вигляді потоку платежів. Тут можливі два альтернативні підходи до визначення бар'єрного значення:

- бухгалтерський;
- фінансовий.

Згідно першого способу інвестиції не беруть до уваги безпосередньо — вони враховуються через амортизаційні відрахування. Щодо другого підходу, інвестиції є окремим фактором, в у той же час амортизація не враховується у поточних затратах.

Бар'єрний випуск за бухгалтерським способом рівний:

$$Q_k = \frac{f+d}{p-c},$$

де d — сума амортизаційних відрахувань за той же період, що використовувався і для f, p, c, наприклад за рік.

Якщо врахувати, що випуск продукції (отримання виручки) та затрати є потоки платежів, то «конкуруючими» функціями є теперішні вартості потоків, а саме $PV(pQ)$ і $PV(f + d + cQ)$. На основі цього отримаємо

$$PV(pQ_k) = PV(f + d + cQ_k),$$

$$pQ_k a_{n;i} = (f + d + cQ_k) a_{n;i}.$$

Оскільки кожна із теперішніх вартостей дисконтується із множником приведення $a_{n;i}$, то бар'єрне значення також обчислюється за

$$Q_k = \frac{f+d}{p-c}.$$

ПРИКЛАД 7. Термін операції 5 років, амортизаційні відрахування , постійні витрати, ціна та змінні витрати відповідно становлять 60, 200, 50 та 30 гр.од.

Обчислити бар'єрне значення кількості продукції. Здійснити перевірку по приведених вартостях конкуруючих функцій за ставкою 15%.

Таким чином, бар'єрне значення:

$$Q_k = \frac{f+d}{p-c} = \frac{200+60}{50-30} = 13.$$

Перевіримо даний результат, для цього визначимо теперішні вартості грошових надходжень і затрат для бар'єрного випуску. Знаходимо $a_{5;15} = 3{,}35216$. Отже,

$PV(pQ) = pQ_k\, a_{5;15} = 50·13·3{,}35216 = 2178{,}904$ (гр.од.)

$PV(f + d + cQ) = (f + d + cQ_k)a_{n;i} = (200+60+30·13)·3{,}35216 = 2178{,}904$ (гр.од.).

Приведені вартості обох конкуруючих функцій рівні, що підтверджує висновок щодо бар'єрного значення.

Якщо всі величини змінюються, то

$$Q_k = \frac{\sum\left(f_t + d_t\right)\nu^t}{\sum\left(p_t - c_t\right)\nu^t}.$$

ПРИКЛАД 8. У таблиці наведені дані щодо ціни, змінних витрат, постійних витрат та амортизаційних відрахувань для різних років.

t	p	c	f	d
1	50	28	20	30
2	50	28	20	30
3	46	30	16	30
4	46	30	16	30
5	42	31	12	30

Для дисконтування застосовується ставка 15%. Знайти бар'єрне значення.

Необхідні розрахунки наведені в таблиці:

t	$\nu^t = \frac{1}{(1+0{,}15)^t}$	f_t+d_t	$(f_t+d_t)\,\nu^t$	$p_t–c_t$	$(p_t–c_t)\,\nu^t$
1	0,869565	50	43,47825	22	19,13043
2	0,756144	50	37,8072	22	16,635168
3	0,657516	46	30,245736	16	10,520256
4	0,571753	46	26,30064	16	9,148048
5	0,497177	42	20,88143	11	5,468947
Разом	—	—	158,71326	—	60,902849

Таким чином,

$$Q_k = \frac{\sum\left(f_t + d_t\right)\nu^t}{\sum\left(p_t - c_t\right)\nu^t} = \frac{158{,}71326}{60{,}902849} = 2{,}606.$$

У випадку фінансового способу знаходження бар'єрної точки потік платежів є таким: $-K$, $(p-c)Q-f$, $(p-c)Q-f$, $(p-c)Q-f$, $\ldots$, де K — розмір інвестицій.

Таким чином чистий приведений дохід (NPV) рівний

$$NPV = -K+[(p-c)Q-f]\, a_{n;i}$$

Звідки

$$Q_k = \frac{1}{p-c}\left(\frac{K}{a_{n;i}} + f\right).$$

ПРИКЛАД 9. Розмір інвестицій становить 1100 гр.од., $p = 50$, $c = 30$, $f = 5$, $d = 100$, $n = 10$ років. Дисконтування відбувається за ставкою 12%. Використовуючи обидва методи, знайти бар'єрне значення.

Згідно бухгалтерського способу:

$$Q_k = \frac{f+d}{p-c} = \frac{5+100}{50-30} = 5,25.$$

Згідно фінансового способу спочатку слід знайти множник приведення

$a_{n;i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, $a_{n;i} = a_{10;12} = 5,650223$

$$Q_k = \frac{1}{p-c}\left(\frac{K}{a_{n;i}} + f\right) = \frac{1}{50-30}\left(\frac{1100}{5,650223} + 5\right) = 9,98.$$

Різниця між бар'єрними значеннями зумовлена тим, що

$$\frac{K}{a_{n;i}} > d.$$

Тобто член ренти, який гасить капіталовкладення, повинен бути більшим за амортизаційні відрахування.