Модуль 1. Математичне програмування

Концептуальні аспекти математичного моделювання економіки.

План

1. Історична довідка
2. Предмет математичного програмування.
3. Математичне моделювання задач .
4. Класифікація задач МП.
5. Стандартні форми ЗЛП.

1. В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливлює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

2. Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming,* що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Реальні економічні задачі є достатньо складними, в яких, наприклад, кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, *предметом* якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукання оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

3. Математизація різноманітних галузей знань на сьогоднішні час не є чимось новим та несподіваним. Математичні методи широко застосовуються в сфері соціально – економічних, екологічних, технічних, міжнародних відносин. Найрізноманітніші прикладні науки, такі як менеджмент, прийняття управлінських рішень, соціально – економічне прогнозування використовують математичний апарат для вирішення своїх проблем і навіть стимулюють розвиток прикладних галузей математики.

Використання сучасних методів моделювання зумовлено:

- загальною тенденцією розширення та поглиблення дослідження процесів в реальному фізичному світі;
- значною тривалістю ряду процесів (екологічних, хіміко - технологічних);
- практичною неможливістю отримувати необхідну інформацію, досліджуючи об’єкт – оригінал (об’єкти макро- та мікросвіту);
- неповними достовірними данними про фізичний об’єкт, що реально існує;
- складністю протікання реальних процесів;
- відсутністю належних умов чи кваліфікації персоналу для проведення досліджень;
- необхідністю проведення великої кількості експериментів, коли тривале дослідження стає економічно недоцільним;
- відсутністю самого об’єкту, що знаходиться на стадії проектування.

Терміни “модель”, “моделювання” ми часто використовуємо в реальному житті, вкладаючи подекуди в них зовсім різні поняття. При розгляді моделювання як універсального методу наукового пізнання доцільно ввести наступне означення моделі.

Модель – це матеріальна або розумово – уявна система чи фізичний об’єкт, яка в процесі дослідження замінює об’єкт – оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт.

Під *моделюванням* розуміють процес формалізації фізичного об’єкта метою якого є створення певного його аналога – моделі, що адекватна об’єктові. Моделювання – це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Всі моделі можуть бути умовно поділені на декілька видів.

I) Фізичні моделі є об’єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Це дійсне відтворення реально існуючого об’єкту. Сюди відносять:

А) *Геометрично подібні* моделі (макети різних установок, приладів, будов). Вони використовуються у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об’єкт, компоновку його елементів, взаємне розміщення їх в просторі.

Б) *Фізично подібні* моделі (дослідження процесів продування моделі крила літака в аеродинамічній трубі). Вони створюються для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей та функціональних залежностей.

В) *Математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин та газів, що описуються однаковими диференціальними рівняннями як плинність електричного струму). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів (електричної моделі).

II) Уявні моделі існують в голові дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Вони поділяються на:

А) *Образні моделі* побудовані з чуттєво – наглядних ідеальних елементів, що використовуються для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ і т.д.).

Б) *Знакові моделі* відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об’єктом та його моделлю. Наприклад, заміна міста – точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста А в місто В йде поїзд…»).

В) *Образно – знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі. **Математична модель** фізичного об'єкта – це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов’язують вихідні характеристики стану об’єкта з вхідною інформацією, геометричними та іншими обмеженнями іншою інформацією, шо накладається на функціонування об’єкту. Математична модель знаходиться у відповідності з об’єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближенність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженність застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (неабсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об’єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ЕОМ).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші риси та властивості модельованого об’єкту та абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв’язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі.* Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигліді конкретнихматематичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Виясняються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв’язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), виясняють чи єдиний роозв’язок, які змінні в ходитимуть в розв’язок та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватииуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* Тут використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв’язок.* Розробляються алгоритми для розв’язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ЕОМ можна провести багаточислені експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування.* Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, неперервною —час, площа посіву тощо, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, норма витрати сировини на одиницю продукції, випадковою — величина прибутку, кількість телят, які народяться у плановому періоді тощо.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні y_r $(r = I\ 2, \ldots, s)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай z— вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z, якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z=f(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l), \qquad (1)$$

де параметри c_k $(k=1,2,...,l)$ є кількісними характеристиками системи.

Функцію z називають *цільовою функцією,* або *функцією мети.* Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення z відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j, щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$max(min)z=f(x_1,x_2,\dots,x_n;\ y_1,y_2,\dots,y_s;c_1,c_2,\dots,c_1\ ). \quad (2)$$

Можливості вибору x_j , завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівозмінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1,x_2,...x_n;y_1,y_2,...y_s;c_1,c_2,...,c_l)\{\le,=,\ge\}0, \qquad (3)$$

де $i=1,2,...,m$.

Тут набір символів ($\le,=,\ge$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\ge$, для інших — рівності (=), а для решти — нерівності типу $\le$.

Система (3) називається *системою обмежень,* або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні; x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,...,n). \qquad (4)$$

Залежності (2)—(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

1. Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

2. У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

3. Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

4. Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати

обмежень типу «=», а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (3), (4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1,x_2,\ldots x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом,* або *планом.* Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій.* Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів* (*область допустимих планів*).

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним.* Оптимальний план *є розв'язком задачі математичного програмування* (2)—(4).

4. У математичному програмуванні виділяють два напрямки — *детерміновані* задачі і *стохастичпі.* Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі прибутки, врожайності сільськогосподарських культур тощо задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж ці величини задані функціями

розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням *a* і дисперсією D, то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням.*

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути ***статичними*** (однокроковими) або ***динамічними*** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2012 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2012 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість (динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним.* У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають ***тактичними.*** Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізняти ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на ***дискретні*** і ***неперервні.*** Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. їх називають задачами *цілочислового програмування.* Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною.*

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні* та *нелінійні.* Якщо цільова функція (2) та обмеження (3) є лінійними, тобто містять змінні x_i тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним методом.* Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. *Задача належить до опуклого програмування* у тому разі, коли цільова функція *вгнута,* якщо вона мінімізується, та *опукла,* якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу ($\geq$) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. *Квадратичне програмування* — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають *дробово-лінійне програмування,* коли обмеження є лінійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі *теорії ігор,* які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою.*

Наведена вище класифікація задач використана для структурування курсу «Математичне програмування».

Приклади економічних задач математичного програмування

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливлює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях(задана асортиментність).Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

В основу моделей лінійного програмування закладені два прості допущення, які майже завжди виконуються:

- припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;
- припущення аддитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 і необхідна кількість поживних речовин позначена A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо α_{ij} — кількість поживних речовин вигляду Ai в продукті виду Bj, β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \tag{1}$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 (\min) \tag{2}$$

Так як від’ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формулюються так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1) знайти такий, який надає функції (2) найменшого значення.*

4. Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

Загальна лінійна економіко-математична модель економічних процесів та явищ — так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \ (max) \qquad (1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ \{\le, \ge, =\} \ b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ \{\le, \ge, =\} \ b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ \{\le, \ge, =\} \ b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \qquad (3)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, які задовольняють умови (2) і (3), і цільова функція (1) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ координати якого задовольняють систему обмежень (2) та умови невід'ємності змінних (3), називається *допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Допустимий план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж *m* лінійно незалежних обмежень системи (2) у вигляді рівностей, а також обмеження (3) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ називається *невиродженим,* якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він *вироджений.*

Опорний план $X^* =(x^*_1,x^*_2,...,x^*_n)$, за якого цільова функція (1) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається *оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

5. *Стандартні форми ЗЛП.*

Для розв’язування задач лінійного програмування та складання для них програм на ЕОМ необхідно, щоб задача була записана в певній стандартній формі. Розрізняємо два типи таких форм:

1) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – рівностями (ОЗЛП з ОР або перша стандартна форма);

2) основна задача лінійного програмування з обмеженнями – нерівностями (ОЗЛП з ОН або друга стандартна форма).

ОЗЛП з ОР полягає в наступному: серед усіх невід’ємних розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (\text{extr}) \qquad (2)$$

набуває екстримального (максимального чи мінімального) значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. Будь – яку задачу ЛП можна звести до ОЗЛП з ОР.

Приймемо це твердження без доведення. Зауважимо лише, як це потрібно зробити: спочатку до менших частин всіх обмежень – нерівностей потрібно додати нову невід’ємну невідому, яка перетворить її в рівність.

ОЗЛП з ОН полягає в тому, що серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n < b_2, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots\vdots\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n < b_m \end{cases} \tag{3}$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \qquad (extr) \tag{4}$$

набуває екстримального значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2. ОЗЛП з ОР завжди може бути зведена до ОЗЛП з ОН.

І звідси випливає така теорема

Теорема 1. ОЗЛП з ОР і ОЗЛП з ОН еквівалентні між собою. Тобто, кожному розв'язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$, який одночасно є розв'язком нерівності, і, навпаки, кожному розв'язку рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + x_{n+1} = b$ $X_{роз}^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n, x^*_{n+1})$ і нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \le b$ відповідає єдиний розв'язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ нерівності.

Щоб звести задачу до другої стандартної форми, необхідно методом Жордана-Гаусса виділити базисні невідомі та використавши невід'ємність невідомих звести до нерівностей обмеження ЗЛП.

Приклад. Звести до ОЗЛП з ОН задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \qquad (\min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (\mathrm{j} = 1,2,3,4)$$

Розв'язування. Виписуємо матрицю системи обмежень

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 & | & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & | & 8 \end{pmatrix}$$

і шукаємо ранг матриці, базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 .$$

Отже, ранг матриці рівний 2, x_1, x_4 — вільні невідомі, x_2, x_3 — базисні. Розв'язавши систему відносно базисних невідомих, маємо

$$\begin{cases} x_2 = 9 - 3x_1 + x_4, \\ x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ \left(\mathrm{j} = 1,2,3,4\right).$$

Так як $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, то з останньої системи маємо:

$$\begin{cases} 9 - 3x_1 + x_4 \geq 0, \\ 1 + x_1 + 2x_4 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \qquad x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Запишемо форму через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4 .$$

Таким чином, ОЗЛП з ОН рівносильна до даної має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Зауважимо, що ОЗЛП з ОН рівносильна до ОЗЛП з ОР може мати різні вигляди, все залежить від того, які ми невідомі оголосимо базисними, а які вільними.

Лекція №2

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

План

1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
2. Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування.

1. Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування скористаємось їх геометричною інтерпритацією. Введемо поняття опуклої множини.

Означення 1. *Множина точок М називається* ***опуклою****, якщо разом з будь – яким двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.*

Означення 2. *Множина називається* ***обмеженою****, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченого радіуса з центром в будь – якій точці множини, і* ***необмеженою*** *в протилежному випадку.*

Означення 3. ***Граничною*** називається така точка множини, в довільному околі якої є і точки, що належать множин, і точки, що їй не належать.

Означення 4. *Сукупність граничних точок множини називається її* ***границею****.*

Найпростіший приклад опуклої множини – опуклий многокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих. Точки, в яких перетинаються відрізки чи прямі границі многокутника називаються його ***вершинами.***

Означення 5. Перетином *областей називають множину точок, що належать кожній з цих областей.*

Теорема 2. Перетин будь – якого числа опуклих областей завжди є опукла множина.

Для геометричної інтерпритації будемо розглядати ОЗЛП з ОН, які містять лише дві невідомі, оскільки вони легко відображаються на прямокутній декартовій системі координат. Задачі з трьома невідомими на малюнку розглядатимуться в проекції, що утруднить їх розгляд, а задачі з більшою кількістю невідомих взагалі важко уявити геометрично.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (5)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,$$

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (\text{extr}) \qquad (6)$$

Лема 3. Розв'язком нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ ***є півплощина.***

Означення 6**. Півплощину, побудовану за нерівністю* $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ *називають **півплощиною розв'язків нерівності**, її границю –* ***граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Означення 7. *Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (5), називають* ***многокутником розв'язків (або областю допустимих значень—ОДЗ)****.*

Теорема 3. Многокутник розв'язків завжди є опуклою фігурою.

Теорема 4. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многокутника розв'язків.

Таким чином задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де цільова функція набуває найменшого (найбільшого) значення.

2. На основі геометричної інтерпретації сформуємо алгоритм графічного методу відшукання оптимальних значень функції.

1) **Будуємо многокутник розв'язків**. Він складається з перетину окремих півплощин розв'язків системи (5). В силу обмежень $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ многокутник розв'язків завжди міститься в першому квадранті.

2) **Знаходимо оптимальну точку**. Вона міститься в вершині многокутника розв'язків. Для її відшукання відкладають *вектор нормалі*

прямої $c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}$, $\vec{N}(c_1, c_2)$. Потім рисуємо лінію перпендикулярну до вектора нормалі, вона називається *лінією рівня*. Пересуваючи лінію рівня в напрямі вектора нормалі до останньої вершини многокутника розв'язків, отримуємо точку максимуму цільової функції, пересуваючи цю лінію в протилежному до вектора нормалі напрямі, в останній вершині дотику отримуємо точку мінімуму цільової функції.

3) **Обчислюємо оптимальні значення**. Знаходимо координати вершин max і min, як розв'язок системи рівнянь, що визначають сторони многокутника, що утворюють ці вершини. Знайдені координати підставляємо в форму (6).

Зауважимо, що якщо многокутник розв'язків необмежений, то можливо, що мінімального чи максимального (або й обох) значень не існує, тобто — це $+\infty$ чи $-\infty$.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x_1 + 3x_2$, за умов обмеження $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

Розв'язування. Побудуємо прямі, що відповідають рівнянням, зрозумілим з системи обмежень та відмітимо ті півплощини, що відповідають нерівностям обмежень.

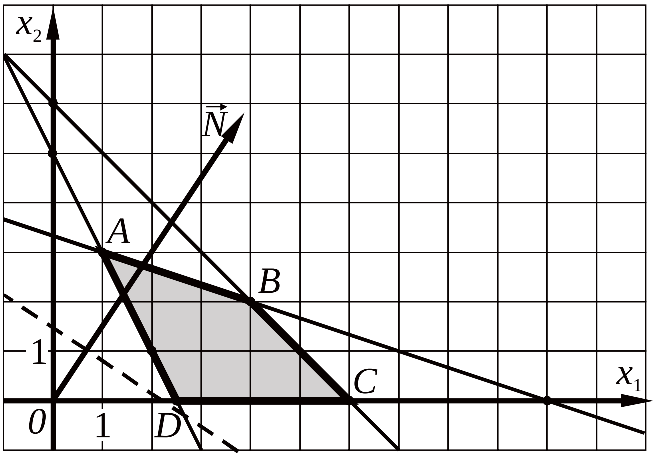
$l_1 : x_1 + 3x_2 = 10$, пряма проходить через точки (1; 3) і (10; 0);

$l_2 : x_1 + x_2 = 6$, пряма проходить через точки (0; 6) і (6; 0);

$l_3 : 2x_1 + x_2 = 5$, пряма проходить через точки (0; 5) і (2; 1).

Умова $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ вказує на достатність розгляду в першому квадранті.

Всім умовам належності до відповідних півплощин відповідає чотирикутник *ABCD*. Будуємо вектор нормалі $\vec{N}(2;3)$ до цільової функції і переміщаємо пряму перпендикулярно до цього вектора. Перший раз ця пряма перетинає трикутник в вершині *D*(2,5; 0), отже $z_{\min} = 2 \cdot 2,5 + 3 \cdot 0 = 5$. Остання вершина дотикається до прямої вздовж її руху – це точка $C(6;\ 0)$, звідси $z_{\max} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$.



Лекція №3.

Симплексний метод та його застосування

План

1. Поняття про симплексний метод та канонічну форму ОЗЛП з ОР.
2. Основні характеристики симплексного - методу.
3. Робота з симплекс - таблицями.

1. Симплексний метод – один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. *Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати* ***опорним.***

Приклад 1. Знайти найбільше значення функції

$$z = 12 + x_1 + 2x_2$$

при таких обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4). \end{cases}$$

Розв'язування. Очевидно, що тут x_3, x_4 — базисні невідомі, а x_1, x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі нульові), тоді $x_3 = 12, x_4 = 16$.

$$x^{(1)} = (0,0,12,16), \ z\left(x^{(1)}\right) = 12.$$

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатній коефіцієнт у цільовій функції (причому, більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Тобто збільшуватимемо x_2.

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 2,3,4). \end{cases}$$

Щоб x_3, x_4 були додатними, то в першому рівнянні x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3} = 4$, а в другому рівнянні $\frac{16}{2} = 8$. Ясно, що x_2 не повинно бути більше 4, бо, інакше, в другому рівнянні x_3 буде від'ємною. x_2 вибираємо як найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2.

Нехай тепер $x_2 = 4$, тоді $x_3 = 0, x_4 = 8$. Ми дістали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію

$$x^{(2)} = (0,4,0,8), \; z\left(x^{(2)}\right) = 20 .$$

Тепер базисними невідомими є x_2, x_4, а x_1, x_3 — вільні. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису методом Жордана – Гаусса, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі

$$z = 12 + x_1 + 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 20 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 .$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати, тому знайдений розв'язок вважатимемо оптимальним.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Ми бачили, що кожному опорному плану відповідає певним чином записана ОЗЛП з ОР. Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниця. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід'ємні
3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. *ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умови* (*1*) – (*3*) *називають* ***канонічною формою.***

Означення 3. *Систему обмежень, що задовольняє умови* (*1*) – (*2*) *називають* ***канонічною системою обмежень.***

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

2. При розв'язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв'язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назвемо ***симплексним методом*** (чи ***симплекс-методом***).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота**. Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв'язком задачі.
2. **Область застосовності**. Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо

розв'язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.

3. **Властивість збіжності**. Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?

4. **Вимоги до обчислень**. З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

3. Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана –Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс – таблицями: Якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є ***оптимальним.***

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпритувати як приріст функції z при збільшені вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо ***алгоритм роботи з симплекс - таблицями:***

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.

4. Для вибору ***ключового стовпця*** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідження цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.

5. Для вибору ***ключового елемента*** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика “опорний план”) до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.

6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо ***ключовий елемент***.

7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.

8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати ***ведучим.***

9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса

а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в п.б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.

10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв’язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

Приклад 2. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці

Види сировини	*Види продукції*		**Запаси сировини**
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428

S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

<u>Розв'язування</u>. Позначимо x_1 – план випуску першого виду продукції, x_2- другої продукції. Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 428, \\ 4x_1 + x_2 \le 336; \end{cases} \qquad z = 24x_1 + 9x_2\,(\max)$$

Зведемо її до стандартної форми ввівши додаткові базисні невідомі x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336; \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4,5. \qquad z - 24x_1 - 9x_2 = 0(\max)$$

Складемо симплекс – таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	0	$-24\downarrow$	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	3	3	0	0
	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \rightarrow$	336	$\boxed{(4)}$	1	0	0	1
II	0	z	2016	0	$-3\downarrow$	0	0	6
	1	$x_3 \rightarrow$	56	0	$\boxed{\frac{1}{2}}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_4	176	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$

	3	x_1	84	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
III	0	z	2352	0	0	6	0	3
	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2,5	1	0,5
	3	x_1	56	1	0	-0,5	0	0,5

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих. Такі таблиці називають *редукованим*.

З останньої таблиці виписуємо оптимальний план

$$x_{опт} = (56{,}112{,}0{,}36{,}0), \quad z_{\max} = 2352.$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

Лекція №4.

Двоїстість в лінійному програмуванні

План

1. Поняття про взаємно двоїсті задачі.
2. Загальні правила складання двоїстих задач.
3. Зв’язок між оптимальними розв’язками двоїстих задач.

1. Використовуючи коефіцієнти задачі лінійного програмування можна скласти ще одну задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою до заданої.

Означення 1. *Дві задачі лінійного програмування називаються* ***взаємно двоїстими,*** *якщо виконуються такі умови:*

1) матриці системи обмежень обох задач є транспонованими, одна відносно другої;

2) система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах напрямлені у протилежні боки;

3) коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої і навпаки;

4) форми в обох задачах оптимізуються протилежно (одна на максимум, друга – на мінімум).

В загальному випадку приладами взаємно двоїстих задач є задачі M та m.

Задача M:

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_kx_k \qquad (\max) \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k \le b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sk}x_k \le b_s, \\ x_j \ge 0, (j = 1,2,...,k). \end{cases} \tag{2}$$

Задача m:

$$z^* = b_0 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_s y_s \qquad (\min) \tag{3}$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{s1} y_s \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \ldots + a_{s2} y_s \geq c_2, \\ \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots\vdots\vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1k} y_1 + a_{2k} y_2 + \ldots + a_{sk} y_s \geq c_k, \\ y_j \geq 0, (j = 1, 2, \ldots, s). \end{cases} \tag{4}$$

Умови означення виконуються автоматично. Наприклад, очевидно, що матриця системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці системи обмежень другої задачі.

Першу з цих ЗЛП називають вихідною задачею, другу – двоїстою до вихідної. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов вихідна задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Вихідною буде задача: *організувати випуск продукції так, щоб використовуючи наявні ресурси отримати найбільший (максимальний) прибуток.* Двоїстою до неї: *якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб при заданих запасах та прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними).*

2. Зрозуміло, що для кожної задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту, бо ЗЛП завжди зводиться до другої стандартної форми (ЗЛП з ОН). Сформулюємо **правила побудови двоїстої задачі**:

Перевірка умов:

1) в усіх обмеженнях вільні члени містяться справа, елементи з невідомими – зліва;

2) всі обмеження нерівності вихідної задачі записані так, що знаки спрямовані в один бік (якщо це не так, то потрібно перемножити обмеження на -1);

3) загальний знак нерівностей пов’язаний з оптимізацією форми наступним чином:

$$"\leq" \Rightarrow \max, \quad "\geq" \Rightarrow \min.$$

Побудова двоїстої задачі:

1) Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома y_i у двоїстій задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню нерівності, має бути невід'ємною, а рівності - довільного знаку.

2) Кожній невідомій x_j двоїстої задачі відповідає обмеження двоїстої. Будуються ці обмеження так: перемножуються коефіцієнти a_{ij}, що стоять при x_j на відповідні двоїсті невідомі y_i. Результати множення підсумовуються і розміщуються в лівій частині обмеження, а в правій – коефіцієнт c_{ij}, при x_j в оптимізуючій формі.

3) В усіх обмеженнях двоїстої задачі ставимо один і той самий знак нерівності, протилежний до загального знака нерівності системи обмежень вихідної задачі.

4) Форму двоїстої задачі оптимізуємо протилежно до форми вихідної задачі.

5) Коефіцієнти при двоїстих невідомих у формі є вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 форми вихідної задачі переноситься у форму двоїстої задачі без змін.

<u>Приклад</u>. Побудувати двоїсту задачу до заданої ЗЛП:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - 2y_3 \ge -2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \le 3, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

$$z = -10y_1 + 4y_2 + 5y_3 \qquad (\max)$$

<u>Розв'язування</u>. Замінимо знак в першій нерівності для зведення до стандартного вигляду, для цього домножимо його на (-1)

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \le 2, \\ -3y_1 + y_2 + y_3 \le 3, \\ y_j \ge 0. \end{cases}$$

Обмеженням ставимо у відповідність двоїсті невідомі x_1, x_2 і будуємо двоїсту задачу:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 \ge -10, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = 2x_1 + 3x_2 \quad (\min).$$

***Зауваження**. Якщо система обмежень має обмеження рівності, то двоїста задача до побудованої двоїстої вже не буде такою як вихідна.*

3. Зв'язок вихідної і двоїстої задач обумовлений тим, що розв'язок одної з них можна добути безпосередньо з розв'язку другої. Для цього використовуємо такі важливі твердження.

Теорема 1. Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв'язок, то буде існувати розв'язок і для другої задачі, а оптимальні значення при цьому збігаються, тобто $z_{\max} = z^*{}_{\min}$ **.**

Теорема 2. Для того, щоб x^* **і** y^* **були оптимальними розв'язками задач M і m відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:**

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0; \qquad y_i^*\left(\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0.$$

З теореми 2 випливає, що коли обмеження задачі на оптимальному розв'язку не перетворюються на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку обов'язково дорівнює нулю.

Ці теореми дають змогу за розв'язком одної задачі зразу знайти розв'язок другої, двоїстої до неї. Розглянемо приклад з попереднього питання. Якщо в першому обмежені шляхом множення на (-1) поміняти знаки на протилежні, то отримаємо задачу лінійного програмування, що досліджувалась графічним методом в Лекції №1. Там же ми показали, що

$z_{\min} = 8$ в точці (4; 0). Отже, $z^*_{\max} = 8$ для вихідної задачі. При підстановці координат в рівності системи обмежень, бачимо, що тільки друге перетворюється в нуль, тому $y_1 = y_3 = 0$. y_2 знаходимо з рівності

$$8 = 4y_2;\; y_2 = 2.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі (0; 2; 0).

Лекція №7.

Математична модель транспортної задачі

План

1. Постановка транспортної задачі.
2. Методи побудови першого опорного плану транспортної задачі.
3. Транспортна задача з неправильним балансом.

1. Деякі задачі лінійного програмування, до яких зводяться практичні моделі управління та планування мають особливу структуру своїх систем обмежень і можуть розв'язуватись без складання загальної симплекс – таблиці. Специфіка їх полягає в тому, що в кожному рядку таблиці лише невелика кількість елементів буде відмінною від нуля чи інших фіксованих сталих.

Особлива форма системи обмежень підказує шляхи створення спеціальних методів розв'язування, для яких немає аналогів серед задач лінійного програмування. При цьому велику роль відіграє і фізичний (реальний) зміст таких задач. Щодо програмування таких задач, то відзначимо, що вони вимагають меншого об'єму оперативної пам'яті (меншою є необхідна кількість комірок) та виконуються із економією машинного часу.

Серед спеціальних задач на практиці найчастіше застосовується так звана ***транспортна задача*** та її різноманітні модифікації. Класична транспортна задача вимагає пошуку найбільш економного плану перевезень однорідного продукту (чи взаємозамінних продуктів) з пунктів виробництва чи зберігання (фабрики, станції, склади тощо) до пунктів споживання (магазини, кіоски призначення і т.д.). Ефективність його оцінюється за критерієм найменшої вартості перевезення. З економічної точки зору це може бути, наприклад, найменша кількість витраченого бензину.

Нехай на m пунктах відправлення $A_1, A_2, ..., A_m$ зосереджено $a_1, …, a_m$ одиниць деякого однорідного вантажу. Цей вантаж необхідно перевезти в n пунктів призначення $B_1, …, B_n$, з потребами, відповідно, $b_1, … ,b_n$ одиниць. Вартість перевезень з пункту A_i в пункт B_j вважається сталою і відомою, та позначається c_{ij}. Зрозуміло, що всі вартості перевезень зручно організувати в двовимірний масив.

Означення 1. *Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення* $(\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j)$ *називається* ***транспортною задачею з правильним балансом*** *(або* ***закритою транспортною задачею****).*

Означення 2*. Транспортна задача для якої загальна сума запасів на всіх пунктах відправлення не дорівнює загальній сумі потреб на всіх пунктах призначення (порушується умова* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ *) називається* ***транспортною задачею з неправильним балансом*** *(або* ***відкритою транспортною задачею****).*

Всі дані транспортної задачі заносять в спеціальну таблицю, яка називається ***матрицею перевезень***:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	c_{i1}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Оптимальний план перевезень наперед невідомий, тому позначимо кількість вантажу, яку потрібно перевезти з пункту A_i в пункт B_j величиною x_{ij}. Це можна оформити у вигляді іншої таблиці:

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси
	B_1	…	B_j	…	B_n	
A_1	x_{11}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	x_{i1}	…	x_{ij}	…	x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
A_m	x_{m1}	…	x_{mj}	…	x_{mn}	a_m
Потреби	b_1	…	b_j	…	b_n	

Надалі, з метою економії часу та більшої наглядності, ми зводитемо ці таблиці в одну.

Складемо математичну модель з таких міркувань. Кількість вантажу, який потрібно перевезти до пункту B_j з усіх пунктів відправлення з одного боку рівна $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$, з іншого – b_j. Так як загальна сума запасів рівна загальній сумі потреб, то

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j=1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Аналогічно, з кожного пункту відправлення відвантажено таку кількість вантажу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Разом $m+n$ нерівностей систем (1) та (2) складають систему обмежень транспортної задачі.

Вартість перевезення вантажу з пункту A_i в пункт B_j дорівнює $c_{ij}x_{ij}$. Щоб знайти загальну вартість перевезень потрібно просумувати вартості перевезень всіх клітинок. Таким чином випишемо цільову функцію транспортної задачі:

$$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (min). \tag{3}$$

Математичною моделлю транспортної задачі є наступне твердження: *серед усіх невід'ємних розв'язків системи рівнянь (1) – (2) знайти такий, при якому функція (3) набуває найменшого значення.*

2. Оскільки транспортна задача є здачею лінійного програмування, то її можна розв'язувати і симплекс – методом. Проте, через просту будову системи обмежень цей метод значно спрощується. Це видно вже при побудові першого опорного плану.

Діагональний метод полягає у послідовному заповненні клітинок матриці перевезень, починаючи з кутової, послідовно вичерпуючи запаси чи потреби. Усі клітинки заповнюються мінімальним числом, що є на перетині рядка запасів та стовпця потреб. Цей метод найбільш пристосований для програмування його з використанням персонального комп'ютера. Його ще називають *методом північно – західного кута*.

Метод найменшої вартості полягає в тому, що заповнення починаємо з клітинки, яка має найменшу вартість перевезення, в ній проставляємо мінімальне значення з перетину запасів та потреб. Після цього вибирається клітинка з найменшим значенням серед тих, що залишилися і так триває до повного заповнення. Якщо запаси чи потреби якогось пункту вже вичерпались, то варто занулити ті клітинки, що ще залишились незаповненими в рядку (стовпці).

Метод осереднених коефіцієнтів полягає в обчислені середніх вартостей рядків та стовпців матриці перевезення за формулами:

$$c_{Ai} = \frac{c_{i1} + c_{i2} + \ldots + c_{in}}{n}; \qquad c_{Bi} = \frac{c_{1j} + c_{2j} + \ldots + c_{mj}}{m}.$$

Після цього обчислюємо усереднені коефіцієнти для кожної клітинки за формулами:

$$k_{ij} = c_{ij} - (c_{A_i} + c_{B_j}).$$

Потім заповнюємо послідовно клітинки з найменшими значеннями усереднених коефіцієнтів. Цей метод є найскладнішим при застосуванні, одначе отриманий опорний план найкращий серед перерахованих.

Приклад 1. Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j.

$$a_i = \begin{pmatrix} 310 & 280 & 250 \end{pmatrix}; b_j = \begin{pmatrix} 250 & 110 & 220 & 260 \end{pmatrix}; c_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 13 \\ 12 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Розв’язування. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що це транспортна задача з правильним балансом.

1) Заповнимо таблицю діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 250	5 60	7 0	3 0	310
A_2	8 0	6 50	9 220	13 10	280
A_3	12 0	4 0	5 0	11 250	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 250 + 5 \cdot 60 + 6 \cdot 50 + 9 \cdot 220 + 13 \cdot 10 + 11 \cdot 250 = 6460.$$

2) Використовуючи метод найменшої вартості, отримаємо:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4 50	5 0	7 0	3 260	310
A_2	8 200	6 0	9 80	13 0	280
A_3	12 0	4 110	5 140	11 0	250
Потреби	250	110	220	260	

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 80 + 4 \cdot 110 + 5 \cdot 140 = 4440.$$

3) Для методу осереднених коефіцієнтів добудуємо в таблиці ще один стовпець та рядочок:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	C_A
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 -8,75 0	5 -4,75 50	7 -4,75 0	3 -10,75 260	310	4,75
A_2	8 -9 250	6 -8 30	9 -7 0	13 -5 0	280	9
A_3	12 -4 0	4 -9 30	5 -10 220	11 -6 0	250	8
Потреби	250	110	220	260		
C_B	8	5	7	9		

Перерахуємо значення опорного плану:

$$z = 5 \cdot 50 + 3 \cdot 260 + 8 \cdot 250 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 30 + 5 \cdot 220 = 4430.$$

Порівнюючи опорні плани, знайдені різними методами, бачимо, що найкращим є опорний план, знайдений за методом осередкованих коефіцієнтів і він дорівнює 4430 умовних одиниць.

Для контролю правильності заповнення матриці перевезень зручно використовувати такі твердження.

Зауваження 1. Ранг матриці системи обмежень транспортної задачі визначається за формулою

$$r=m+n-1,$$

де m – число пунктів відправлення, n – число пунктів споживання.

Зауваження 2. Число базисних (заповнених) клітинок завжди дорівнює рангу матриці транспортної задачі. У протилежному випадку їх потрібно доповнити до відповідної кількості за рахунок вільних з базисним значенням нуль.

3. На практиці транспортні задачі, в яких загальна сума запасів співпадає з загальною сумою потреб зустрічаються дуже рідко. Набагато частіше, якась з цих сум більша (наприклад, явище дефіциту чи переповнення ринку товарів). Такі задачі називають задачами з неправильним балансом і розв'язують їх ***розподільчим методом.*** Тобто спочатку зводять цю задачу до задачі з правильним балансом, додаючи або фіктивний пункт призначення чи відправлення в залежності від дефіциту потреб чи запасів. *Вартості в фіктивних пунктах вважають рівними нулю, щоб не змінювалась загальна вартість перевезень.*

При побудові першого опорного плану у розрахунках ми фіктивні пункти не враховуємо, бо всі вартості в ньому найменші (нулі), але на загальну вартість перевезень вони не впливають. Проводимо заповнення в основній таблиці, а потім остачі вносимо в фіктивні клітинки.

<u>Приклад 2.</u> Побудувати перший опорний план для транспортної задачі з матрицею вартості перевезень c_{ij}, вектором запасів a_i та вектором потреб b_j

$$a_i = \begin{pmatrix} 60 & 40 \end{pmatrix}; \ \ b_j = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 45 & 15 \end{pmatrix}; c_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язування. Загальні суми запасів *100* і потреб – *110* є різними тому потрібно для збалансування ввести фіктивний пункт постачання із запасами, що дорівнюють *110 – 100 =10* (одиниць) і нульовими вартостями.

Побудуємо матрицю перевезень, що містить і фіктивний пункт та заповнимо її методом найменшої вартості.

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3 0	4 30	6 30	7 0	60
A_2	2 20	5 0	8 5	1 15	40
A_3	0 0	0 0	0 10	0 0	10
Потреби	20	30	45	15	

При розрахунку значення опорного плану на рядок (в даному випадку) фіктивних клітинок можна взагалі не звертати уваги. Прорахуємо значення опорного плану:

$$z = 4 \cdot 30 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 8 \cdot 5 + 1 \cdot 15 = 395\,(\text{од.})$$

Контрольні запитання:

1. Поясніть суть класичної транспортної задачі.
2. Чим оцінюється ефективність розв'язку транспортної задачі?
3. Яка транспортна задача називається задачею з правильним та неправильним балансом? Наведіть синоніми цих назв.
4. Що таке матриця перевезень?
5. Побудуйте математичну модель транспортної задачі.
6. Назвіть основні методи побудови першого опорного плну транспортної задачі та поясніть їх суть.

7. Який з методів побудови першого опорного плану є найоптимальнішим? Який найкращий для програмування, чому?
8. Чому дорівнює ранг матриці перевезень?
9. Поясніть суть розподільчого методу розв'язування транспортної задачі з неправильним балансом.
10. Що таке фіктивні клітинки, для чого їх використовують?

Лекція №8.

Оптимальний план транспортної задачі

План

1. Критерій оптимальності опорного розв'язку ТЗ методом потенціалів.
2. Метод квадратів переходу між опорними планами транспортної задачі.
3. Перехід між опорними планами за циклом перерахунку.

1. Із прикладів, наведених в попередній лекції, видно, що перші опорні плани ТЗ, побудовані діагональним методом та методом найменшої вартості не є оптимальними. Що стосується методу осередкованих коефіцієнтів, то ніякого висновку про це ми зробити не можемо. Тим часом питання оптимальності плану має велике економічне значення.

Знайдемо критерій оптимальності транспортної задачі із співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач. Ввівши двоїсті змінні α_1, α_2, ..., α_m та β_1, β_2, ..., β_n, складемо двоїсту задачу до транспортної. Її система обмежень має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots n) \tag{1}$$

Нерівності (1) можна конкретизувати, враховуючи співвідношення між оптимальними розв'язками двоїстих задач:

А) Для базисних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \tag{2}$$

Б) Для вільних невідомих (клітинок):

$$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}. \tag{3}$$

Такий метод називають ***методом потенціалів*** . При його використанні ми спочатку шукаємо такі потенціали α_i, β_j, які задовольнятимуть рівності (2) для всіх заповнених клітинок, а потім перевіримо, чи виконуються нерівності (3) для всіх незаповнених клітинок.

Приклад 1. Використаємо метод потенціалів для дослідження задачі з п.2 лекції №7.

Розглянемо опорний план, побудований діагональним методом:

Пункти відправлення	Пункти споживання				Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	4 250	5 60	7 0	3 0	310	0
A_2	8 0	6 50	9 220	13 10	280	1
A_3	12 0	4 0	5 0	11 250	250	-1
Потреби	250	110	220	260		
β_j	4	5	8	12		

Використовуючи умови (2), отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження потенціалів:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 4, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 6, \\ \alpha_2 + \beta_3 = 9, \\ \alpha_2 + \beta_4 = 13, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 11. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) містить 7 рівнянь із 8 невідомими. Ранг системи дорівнює 4+4-1=7, тому одну невідому α_1 оголошуємо вільною і прирівнюємо до нуля. Розв’язки системи відображені в таблиці.

Перевіримо виконання умов (3) для побудованого опорного плану:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 \le 7 - \textit{хибне}, \\ \alpha_1 + \beta_4 \le 3 - \textit{хибне}, \\ \alpha_2 + \beta_1 \le 8 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_1 \le 12 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_2 \le 4 - \textit{істине}, \\ \alpha_3 + \beta_3 \le 5 - \textit{хибне}. \end{cases} \tag{5}$$

Із умов (5) випливає, що план не є оптимальним.

Усі попередні твердження можна узагальнити у вигляді теореми.

Теорема 1. Для того, щоб опорний план транспортної задачі був оптимальним необхідно і досить, щоб коефіцієнти

$$\gamma_{ij} = c_{ij} - \left(\alpha_i + \beta_j\right) \qquad \textbf{(6)}$$

обчислені для вільних клітинок, де α_i, β_j **- розв'язки системи (2), були невід'ємними.**

Зауваження 1. Для обчислення потенціалів не обов'язково складати систему рівнянь, їх можна знайти за таким правилом*: невідомий потенціал дорівнює різниці вартості базисної клітинки і значення відомого потенціалу.*

2. Опорний план, як правило, буває неоптимальним, тому необхідно вміти переходити від одного опорного плану до іншого так, щоб значення форми (цільової функції) постійно зменшувалось. Один з таких методів – ***метод квадратів***.

Означення 1*. Чотири клітинки, що розміщені в кутах виділеного прямокутника матриці перевезення, в яких хоча б на одній діагоналі розміщені базисні клітинки будемо називати* ***квадратом****.*

Дві інші клітинки можуть бути будь – які.

Означення 2. *Квадрат будемо називати* ***неправильним,*** *якщо сума вартостей базисних клітинок діагоналі більша за суму двох інших вартостей і* ***правильним,*** *якщо ця сума менша. Квадрат називаємо* ***нейтральним****, якщо обидві суми рівні між собою.*

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. В оптимальній матриці перевезень не існує неправильних квадратів.

Метод квадратів грунтується на поступовій заміні всіх неправильних квадратів – правильними. Зауважимо, що неправильний квадрат завжди має вершину в вільній клітинці для якої не виконується умова (3).

Приклад 2. У вищерозглянутій таблиці є неправильним квадрат A_1B_2 - A_1B_3 – A_2B_3 – A_2B_2.

5 60	7 0
6 50	9 220

У ньому сума вартостей базисних клітинок 5+9=14 більша за суму вартостей двох інших клітинок 7+6=13.

Перерахунок здійснюємо наступним чином:

- вибираємо на базисній діагоналі менше значення кількості перевезень (у нашому випадку це 60);
- віднімаємо це значення від елементів базисної діагоналі і додаємо до елементів іншої діагоналі:

5 60-60	7 0+60
6 50+60	9 220-60

Отримаємо

5 0	7 60
6 110	9 160

Переконаємось, що такі перетворення зменшують вартість перевезень. Дійсно попереднє значення Z=300+300+1980=2580 (у.о.), а перераховане – Z=420+660+1440=2520 (у.о.).

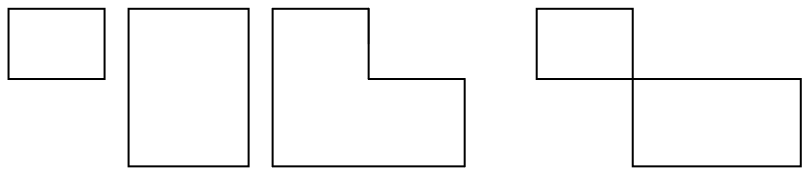
Для досягнення найкращого результату потрібно перерахувати всі неправильні квадрати. Коли в матриці перевезень вже не буде неправильних квадратів, то слід перевірити знайдений розв’язок за методом потенціалів на оптимальність.

Зауваження 2. Відсутність неправильних квадратів ще не гарантує оптимальності розв’язку.

3. Введемо в розгляд ще один метод знаходження оптимального плану транспортної задачі, який носить назву ***методу перерахунку за циклом.***

Означення 3*. *Циклом *в матриці будемо називати замкнену ламану лінію, вершини якої розміщені в клітинках матриці перевезень і з кожної вершини виходять два відрізки: один по рядку, другий по стовпцю.*

Можливі види циклів схематично зобразимо на малюнку.



Перпендикулярні ламані в циклі можуть перетинатись і точка їх перетину не буде вважатись вершиною циклу.

Означення 4. *Вершини одного і того самого відрізку циклу будемо називати* ***сусідніми***.

Означення 5. *Цикл, сусіднім вершинам якого поставлені у відповідність протилежні знаки (“+” і “ - ”), називають* ***означеним***.

Означення 6. *Означений цикл, одна вершина якого міститься у вільній клітинці, а всі інші у базисних, називають* ***циклом перерахунку.***

У вільній клітинці завжди ставиться знак “+”.

Означення 7. Зсувом *по циклу перерахунку на число θ називають таку операцію, при якій в додатній вершині додається одне і те саме число θ, а у від’ємних віднімається.*

Справедливими є наступні твердження.

Теорема 3. Зсув за означеним циклом в матриці перевезень перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв'язок цієї самої задачі.

Теорема 4. Для будь – якої вільної клітинки існує лише один цикл перерахунку.

<u>Приклад 3.</u> Перерахувати опорний план транспортної задачі з відомим першим опорним планом за циклом перерахунку.

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		0
A_1	4 - 22	1 + 38	3 0	4 0	4 0	60	
A_2	2 0	3 - 7	2 20	2 + 8	3 0	35	2
A_3	3 + 0	5 0	2 0	4 - 10	4 30	40	4
Потреби	22	45	20	18	30		
β_j	4	1	0	0	0		

<u>Розв'язування.</u> Безпосередньою перевіркою за методом потенціалів переконуємось, що план не є оптимальним. Зокрема, вільна клітинка A_3B_1 не задовольняє умову (3). Тому потрібно здійснити перехід до іншого опорного плану.

Можливим циклом перерахунку є той, що зображений в таблиці. Виберемо у вершинах найменше базисне значення (це 7) і зробимо зсув на цю величину. У додатних вершинах додамо 7, а від від'ємних віднімемо. В результаті одержимо новий опорний план

Пункти відправлення	Пункти споживання					Запаси	α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5		0
A_1	4 15	1 45	3 0	4 0	4 0	60	
A_2	2 0	3 0	2 20	2 15	3 0	35	2
A_3	3 7	5 0	2 0	4 3	4 30	40	4
Потреби	22	45	20	18	30		
β_j	4	1	0	0	0		

Зауваження 3. Значення базисних клітинок, які не брали участь у циклі переписуємо без змін.

Модуль 2. Дослідження операцій

Лекція 1. Теоретичні основи дослідження операцій.

План

1. Об’єкт, предмет, мета та завдання дисципліни.
2. Поняття моделі та моделювання.
3. Основні поняття економіко-математичної моделі.
4. Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей.

1. Об’єкт, предмет, мета та завдання дисципліни.

Важливим математичним інструментом знаходження розв’язків економічних задач є методи дослідження операцій, яке спрямоване на розв’язання прикладних задач, які можна коректно описати з допомогою тієї чи іншої математичної моделі, щоб отримати оптимальний розв’язок. Оскільки економічні процеси і явища, що вивчаються, постійно ускладнюються, зростає розмірність і розгалуженість економічних задач, а також вдосконалюється обчислювальна техніка, то методологія дослідження операцій стала дієвим інструментом при розв’язуванні багатьох прикладних задач.

Дослідження операцій – комплексна наукова дисципліна математичного циклу, яка відіграє важливе значення при підготовці кваліфікованих економістів-аналітиків.

Мета та завдання дисципліни – це набуття студентами теоретичних знань і практичних навиків із питань постановки та розв’язання оптимізаційних та управлінських задач економіки математичним апаратом дослідження операцій.

Предметом дисципліни «Дослідження операцій» є математичні методи та моделі дослідження операцій, які використовуються в системі управління при вирішенні економічних ситуацій і проблем.

Найбільш важливими моделями, що використовуються при дослідженні операцій, є математичні. Будь-яка модель у задачі дослідження операцій включає в себе змінні, систему обмежень і мету. Мета – це цільова функція, яка задається на множині допустимих розв’язків D (відомо з математичного програмування). Сама множина виражає міру досягнення мети:

- якщо D – пуста множина, то розв’язків задачі не існує;
- якщо D – одна точка, то вона є єдиним розв’язком, а тому не представляє для нас інтересу;
- якщо множина D містить більш ніж один розв’язок, то задача оптимізації полягає в знаходженні оптимального розв’язку на множині допустимих, при якому цільова функція набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Слід відмітити, що якщо множина D скінчена, то оптимальний розв’язок може бути знайдений методом простого перебору всіх точок множини і обчислення по них значень цільової функції, а потім вибрати ту з них, на якій функція мети найкраща.

При побудові моделі робимо припущення, що всі змінні, параметри, обмеження та цільова функція моделі кількісно вимірні.

В залежності від виду цільової функції та системи обмежень задачі оптимізації можна класифікувати таким чином:

- якщо цільова функція і система обмежень задачі лінійні, то це задача лінійного програмування, в протилежному випадку – нелінійного;

- якщо в цільовій функції та системі обмежень змінні в квадраті, то це задача квадратичного програмування;

- якщо змінні можуть приймати тільки цілі значення, то задача цілочислового програмування;

- в залежності від впливу фактору часу на цільову функцію та систему обмежень задачі поділяють на динамічні (існує вплив часу) та статичні (впливу часу немає);

- якщо змінні задачі є випадковими величинами, то задача оптимізації є задачею стохастичного програмування.

Основна мета процесу дослідження операцій полягає в тому, щоб знайти вигідний (оптимальний) спосіб дії при розв’язанні тієї чи іншої задачі організаційного керування в умовах певних характеристик та дефіциту ресурсної бази.

Під операціями розуміють будь-який захід, спрямований на досягнення поставленої мети. Результат операції залежить від методів її проведення та вмілої організації, тобто вибору деяких характеристичних параметрів системи. Будь-який визначений набір параметрів називається розв’язком. Оптимальними вважаються ті розв’язки, які за певними критеріями кращі від інших.

При розв’язанні конкретних прикладних задач керування використання методів дослідження операцій припускає:

- побудову економіко-математичних моделей для задач прийняття рішень у складних ситуаціях або в умовах ризику чи невизначеності;
- вивчення взаємозв’язків і залежностей, які послужать основою прийняття вигідних рішень і вироблення критеріїв ефективності.

2. Поняття моделі та моделювання.

Моделювання – процес побудови моделі, за допомогою якого вивчається функціонування об’єктів різної природи. Він складається з трьох основних елементів: суб’єкта, об’єкта дослідження та моделі, за допомогою якої суб’єкт пізнає об’єкт.

Модель – це такий матеріально або розумово зображуваний об’єкт, який у процесі дослідження замінює об’єкт-оригінал таким чином, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт.

Схематичне зображення процесу моделювання представлене на рис 1.1.

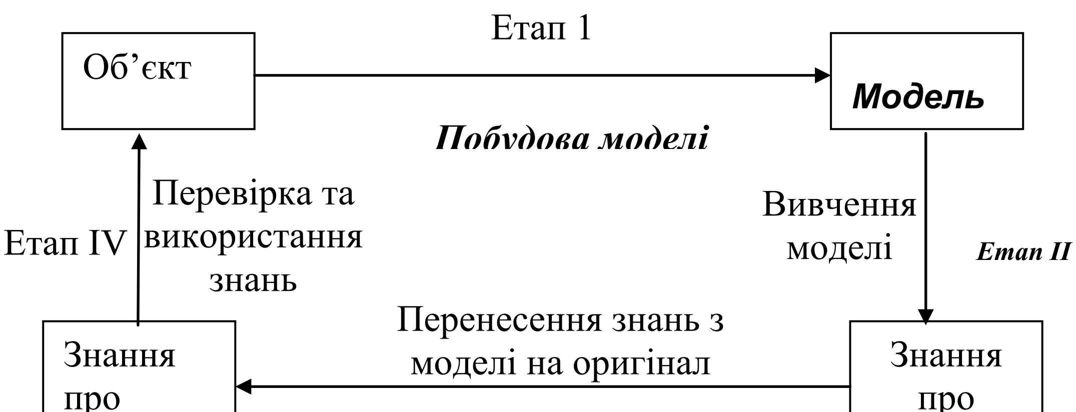


Рис. 1.1. Основні етапи моделювання

Математичне моделювання – універсальний та ефективний інструмент пізнання внутрішніх закономірностей, властивих явищам і процесам. Воно дає можливість вивчити кількісні взаємозв’язки і взаємозалежності системи, що вивчається, і вдосконалити її подальший розвиток та функціонування.

Для того, щоб з допомогою моделювання добре пізнати об’єкт дослідження, потрібно правильно побудувати математичну модель, яка має бути адекватною процесу, що вивчається.

Математична модель представляє собою систему математичних формул, нерівностей чи рівнянь, які більш або менш адекватно описують явища та процеси, що властиві оригіналу.

Серед існуючих систем економічні є найскладнішими, тому при побудові їх моделей слід відображати тільки найважливіші та найхарактерніші властивості процесів або явищ, що вивчаються. Внаслідок цього всі моделі є спрощеним відображенням реальної системи, але якщо цей процес виконано коректно, то отримане наближене відображення реальної ситуації дає можливість мати достатньо точні характеристики об’єкта дослідження.

3. Основні поняття економіко-математичної моделі.

При побудові економіко-математичної моделі потрібно володіти наступними поняттями:

- критерій оптимальності – це деякий показник, який має економічний зміст та служить способом формалізації конкретної мети управління і виражається за допомогою цільової функції через фактори моделі;

- цільова функція математично зв'язує між собою фактори моделі, і її значення визначається значеннями цих величин;

- система обмежень визначає границі, існування області дійсних та допустимих розв'язків і характеризує основні зовнішні та внутрішні властивості об'єкта;

- рівняння зв'язку є математичною формалізацією системи обмежень;

- допустимий розв'язок моделі – це такий набір значень змінних, які задовольняють її рівняння зв'язку та мають економічний зміст;

- оптимальний розв'язок – це такий допустимий розв'язок, при якому цільова функція в залежності від змісту моделі приймає найбільше чи найменше значення.

4. Принципи та етапи побудови економіко-математичних моделей.

Для побудови економіко-математичної моделі потрібна певна сукупність принципів (правил гри), які дають можливість коректно здійснювати процес формалізації систем та об'єктів, що досліджуються.

Загальні принципи економіко-математичного моделювання випливають із загальних основ системного аналізу, тобто вони повинні бути відповідями на наступні запитання:

1) що повинно бути зроблено;

2) коли повинно бути зроблено;

3) з допомогою кого повинно бути зроблено;

4) на основі якої інформації здійснюються відповідні дії;

5) який результат повинен бути отриманий на основі цих дій.

Побудова економіко-математичної моделі включає в себе наступні етапи:

- побудова концептуальної моделі, тобто сукупності якісних залежностей критеріїв оптимальності і різного роду обмежень від факторів, які є суттєвими для адекватного відображення функціонування об’єкта;

- на основі концептуальної моделі формується числова математична модель об’єкта, тобто визначення кількісних математичних співвідношень, що формалізують якісні залежності концептуальної моделі.

Лекція 2. Оптимізаційні методи та моделі

План

1. *Загальні відомості про оптимізаційні моделі*
2. *Узагальнена модель оптимального планування*
3. *Розв’язування задачі оптимального планування з допомогою пакету прикладних програм LINA та післяоптимізаційний аналіз отриманих розрахунків*

1. Загальні відомості про оптимізаційні моделі

Для розв’язання найрізноманітніших оптимізаційних задач треба мати математичну модель даної задачі. У більшості випадків різні за змістом задачі є частковим випадком однієї загальної задачі оптимізації. У математичній моделі можна виділити наступні елементи: вихідні дані, залежності, які описують цільову функцію та обмеження.

Залежності між змінними як цільових функцій, так і обмежень, можуть бути лінійними та нелінійними. Нагадаємо, що лінійними називаються такі залежності, в яких змінні входять в першій степені і між ними немає добутку. Якщо змінні входять не в першій степені або є добуток змінних, то залежності є нелінійними. Поєднання різноманітних елементів моделі приводить до різних класів задач оптимізації, які потребують різних методів розв’язування і різних програмних продуктів.

Ефективність виробничого процесу у великій мірі залежить від рівня раціонального розподілу ресурсів, яке може ґрунтуватися на використанні оптимізаційних моделей. Під ресурсами ми розуміємо все те, що необхідне для організації виробничого процесу, тобто фінансові і трудові ресурси, сировина і матеріали, устаткування і т.д. Тому важливими задачами управління є задачі розподілу ресурсів.

Одним з найефективніших, фундаментально досліджених і експериментально перевірених на практиці економіко-математичних моделей є клас оптимізаційних задач з лінійною формою взаємозв'язків, математичним апаратом якого є лінійне програмування.

Основні вимоги, що ставляться до методів лінійного програмування при використанні їх для проведення оптимізаційних розрахунків економічних задач:

- будь-яка задача повинна бути представлена в математичній формі за допомогою системи нерівностей або рівнянь;
- будь-який отриманий розв'язок не повинен суперечити економічному змісту задачі;
- система лінійних рівнянь повинна бути невизначеною;
- для знаходження оптимального розв'язку системи необхідно сформулювати критерій оптимальності і виразити його у формі цільової функції, яка в процесі розв'язку набуде екстремального значення.

Для розв'язання задачі, яка задовольняє перераховані вимоги, необхідно, щоб задача задовольняла багаточисельні організаційно-економічні, технологічні та інші вимоги, характерні для конкретної задачі.

2. Узагальнена модель оптимального планування

Розглянемо загальну модель оптимального планування. Припустимо, що планується організувати випуск продукції $\boldsymbol{r}$ видів за допомогою $\boldsymbol{m}$ можливих технологій. Для цього використовується $\boldsymbol{n}$ видів виробничих ресурсів (матеріалів, обладнань, праці, сировини і т.д.).

Введемо позначення:

i – індекс ресурсу, $i=\overline{1,n}$; j – індекс технології, $j=\overline{1,m}$; l – індекс виду продукції, $l=\overline{1,r}$; a_{ij} – витрати ресурсу виду i на одиницю інтенсивності технології виду j; b_{lj} – вихід продукції виду l від одиниці інтенсивності технологій виду j; A_i – обсяг запасів ресурсів виду i; K_l – коефіцієнт, який відображає частку продукції виду l у загальному обсязі кінцевої продукції; x_j – інтенсивність технологічного способу виробництва виду j; Z – загальний обсяг кінцевої продукції. Потрібно визначити з якою інтенсивністю повинні працювати технологічні лінії, щоб забезпечити максимум випуску кінцевої продукції, тобто треба знайти такий план $\{x_j \ge 0; j=\overline{1,m}; Z \ge 0\}$, який забезпечить

$$Z \to \max \tag{5.1}$$

при виконанні обмежень:

а) за обсягом ресурсів

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \le A_1, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \le A_n; \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

б) за структурою кінцевої продукції

$$\left.\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1m}x_m \ge K_1 Z, \\ \vdots \\ b_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m \ge K_r Z. \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

Для отримання числових розв’язків задач лінійного програмування можна використовувати залежно від виду засобів обчислювальної техніки існуючі пакети прикладних програм, зокрема, програмний продукт LINA або стандартну офісну програму EXCEL.

Для ознайомлення користувача з основними характеристиками системи LINA, способами вводу інформації та виконання кожної команди в системі LINA існує команда HELP. Щоб отримати інформацію про певну команду, необхідно після HELP ввести ім’я команди, яка нас цікавить.

Програмна система LINA призначена для розв’язку та проведення післяоптимізаційного аналізу загальної задачі лінійного програмування (максимальний розмір задачі: 229 змінних і 118 обмежень з урахуванням максимізації або мінімізації цільової функції). У своєму складі вона має 36 команд, об’єднаних в 10 категорій.

Розглянемо структуру команд системи за категоріями:

1) інформації

HELP COM CAT

2) входу

MAX MIN RETR TAKE LEAN

3) індексації

PIC TABL LOOK NONZ SHOC SOLU RANGE

4) запису у файл

SAVE DIVE PVRT SDBC

5) розв’язку

GO PIV

6) редагування

ALT EXT DEL SUB APPC

7) виходу

QUIT

8) цілочисельного та параметричного програмування

INT PARA BIP

9) формату індикації

WIDTH TERS VERB BAT RAGE

10) інші

STAT

3. Розв’язання задачі оптимального планування з допомогою пакету прикладних програм LINA та післяоптимізаційний аналіз отриманих розрахунків

<u>Приклад 5.1.</u> Припустимо, що нами планується організувати випуск продукції трьох видів за допомогою чотирьох технологічних способів виробництва на основі чотирьох видів ресурсів, запаси яких обмежені. Запас та витрати ресурсів на одиницю інтенсивності відповідних технологій та вихід продукції від них наведені в таблиці 5.1. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва, який забезпечить максимум кінцевої продукції, якщо частка продукції A становить 0.2, продукції B – 0.5, а продукції C – 0.3.

♦***Розв’язування***.

Для побудови математичної моделі введемо позначення: x_1, x_2, x_3, x_4 – шукані розміри інтенсивності відповідних технологічних способів виробництва; Z – обсяг виробництва кінцевої продукції.

Таблиця 5.1

Показники		Технологічні способи (витрати ресурсів, вихід продукції)				Обсяг ресурсів
		I	II	III	IV	
Ресурси	Обладнання, маш.-год.	1.9	3.3	2.1	2.8	295
	Праця, люд.-год.	3.3	2.4	4.5	2.7	410
	Електроенергія, кВт.год.	4.6	3.8	2.7	4.1	505
	Фінансові кошти, грн.	6	7	5	4	890
Продукція	A, шт.	–	3	2	4	
	B, шт.	2	–	1	1	
	C, шт.	3	2	1	–	

Враховуючи введені позначення, математична модель задачі набуває вигляду :

знайти такий план $\{x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, Z \ge 0\}$, який забезпечить

$$Z \to \max$$

при виконанні умов:

по використанню обладнання

$$1.9x_1 + 3.2x_2 + 2.1x_3 + 2.8x_4 \le 295;$$

по використанню праці

$$3.3x_1 + 2.4x_2 + 4.5x_3 + 2.7x_4 \le 410;$$

по використанню електроенергії

$$4.6x_1 + 3.8x_2 + 2.7x_3 + 4.1x_4 \le 505;$$

по використанню фінансових коштів

$$6x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 \le 890;$$

по структурі кінцевої продукції відносно:

- продукції А

$$3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \ge 0.2Z \quad \text{або}$$

$$-0.2Z + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \ge 0;$$

- продукції В

$$2x_1 + x_3 + x_4 \ge 0.5Z \quad \text{або} \quad -0.5Z + 2x_1 + x_3 + x_4 \ge 0;$$

- продукції С

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 0.3Z \quad \text{або} \quad -0.3Z + 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 0.$$

Розв'яжемо дану задачу з допомогою пакету LINA. Введення цільової функції та системи обмежень задачі здійснюється таким чином:

: max *Z*

? st

? 1.9x1+3.2x2+2.1x3+2.8x4<=295

? 3.3x1+2.4x2+4.5x3+2.7x4<=410

? 4.6x1+3.8x2+2.7x3+4.1x4<=505

? 6x1+7x2+5x3+4x4<=890

? -0.2*Z* +3x2+2x3+4x4>=0

? -0.5*Z*+2x1+x3+x4>=0

? -0.3*Z*+3x1+2x2+x3>=0

? end

Для отримання оптимального розв'язку та післяоптимізаційного аналізу задачі використовуємо команду GO. В результаті отримаємо розв'язок задачі (значення цільової функції, інтенсивність відповідних технологій, використання ресурсів):

: GO

Значення цільової функції

1) 415.180300

Змінна	Значення	Відносна оцінка
Z	415.180300	.000000
X1	88.503800	.000000
X2	.000000	1.957552
X3	19.647020	.000000
X4	10.935500	.000000

Рядок	Додаткова змінна	Двоїста змінна
2)	54.964630	.000000
3)	.000000	.150523
4)	.000000	.699932
5)	217.000100	.000000

6)	.000000	-.354482
7)	.000000	-1.858207
8)	160.604400	.000000

Число ітерацій = 4

З отриманого розв'язку бачимо, що за оптимальним планом випуск кінцевої продукції становитиме Z=415.1803 одиниць. При цьому інтенсивність відповідних технологій буде: першої – X1=88.5038; третьої – X3=19.64702; четвертої – X4=10.9355. Друга технологія не використовується (X2=0). Змінні, значення яких не дорівнюють нулю в оптимальному плані, називаються базисними, а змінні, значення яких рівні нулю – вільними. Значення відносних оцінок для базисних змінних рівне нулю, а значення відносної оцінки для вільної невідомої вказує на зменшення значення цільової функції при включенні в базис вільної невідомої X2 з одиничною інтенсивністю, тобто в нашому випадку при збільшенні інтенсивності другої технологічної лінії на одиницю максимальний випуск кінцевої продукції зменшиться на 1.957552.

Але спеціаліст, який використовує під час розв'язування задач організації управління виробництвом та інших економічних процесів методи лінійного програмування, дуже рідко задовольняється лише чисельним значенням змінних. У більшості випадків він хоче знати, в якому інтервалі можна змінювати вхідні параметри без суттєвого відхилення від знайденого оптимуму і без значного порушення структури одержаного базису. На ці запитання дає відповідь економіко-математичний аналіз оптимальних розрахунків, який здійснюється за допомогою двоїстих оцінок і коефіцієнтів заміщення останньої симплекс-таблиці.

Аналіз оптимальних розрахунків за допомогою двоїстих оцінок ґрунтується на двоїстій постановці задачі лінійного програмування. Відомо, що для будь-якої задачі лінійного програмування існує двоїста, де перша задача називається прямою, а друга по відношенню до неї – двоїстою. Для прикладу, в якості прямої задачі – задача загального оптимального планування. Побудуємо до неї двоїсту. З цією метою введемо $n+r$ оптимальних оцінок і позначимо через $y_1, y_2, ..., y_n$ оцінки наявних ресурсів, а через $y_{n+1}, ..., y_{n+r}$ оцінки одиниці продукції відповідного виду. Тоді математична модель двоїстої задачі набуде вигляду:

$$F = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n \to \min \tag{5.4}$$

при

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + \cdots + a_{n1} y_n - b_{11} y_{n+1} - \cdots - b_{r1} y_{n+r} \geq 0; \\ \vdots \\ a_{m1} y_1 + \cdots + a_{nm} y_n - b_{1m} y_{n+1} - \cdots - b_{rm} y_{n+r} \geq 0 \\ K_1 y_{n+1} + \cdots + K_r y_{n+r} = 1. \end{cases} \tag{5.5}$$

Із основної теореми двоїстості відомо: якщо одна із пар двоїстих задач має хоча б один оптимальний план, то і друга задача також має оптимальний план, причому максимум цільової функції початкової задачі та мінімум двоїстої чисельно рівні.

З оптимального розв'язку випишемо числові значення двоїстих оцінок:

$$y_2 = 0.150523;\ y_3 = 0.699932;\ y_5 = -0.354482;\ y_6 = -1.858207;$$
$$y_1 = y_4 = y_7 = 0;$$

Першим напрямком використання двоїстих оцінок є оцінка ефективності технологічних способів виробництва або видів діяльності. Для цього необхідно порахувати загальні оцінки витрат та випуску продукції по кожному технологічному способу виробництва (табл. 5.2).

З цієї таблиці видно, що для технологічних способів виробництва, які ввійшли в оптимальний план, сумарні оцінки витрат і виробництва продукції збігаються. Другий технологічний спосіб виробництва є неефектним, тому що для нього сумарна оцінка витрат перевищує сумарну оцінку випуску на величину відносної оцінки.

Таблиця 5.2

Показники	Оцінка витрат і випуску продукції при відповідних технологіях			
	I	II	III	IУ
Обладнання $y_1 = 0$	1.9•0=0	3.3•0=0	2.1•0=0	2.8•0=0
Праця $y_2 = 0.15052$	3.3•0.150523= =0.4967259	2.4•0.150523= =0.3612552	4.5•0.150523= =0.6773535	2.7•0.150523= =0.4064121
Електроенергія $y_3 = 0.699932$	4.6•0.699932= =3.2196872	3.8•0.699932= =2.6597416	2.7•0.699932= =1.8898164	4.1•0.699932= =2.8697212
Фін. кошти $y_4 = 0$	6•0=0	7•0=0	5•0=0	4•0=0
Сумарна оцінка витрат	***3.7164131***	***3.0209968***	***2.5671699***	***3.2761333***
Продукція А $y_5 = 0.35448$	0•0.354482=0	3•0.354482= =1.063446	2•0.354482= =0.708964	4•0.354482= =1.417928
Продукція В $y_6 = 1.8582$	2•1.858207= =3.716414	0•1.858207=0	1•1.858207= =1.858207	1•1.858207= =1.858207
Продукція С $y_7 = 0$	3•0=0	2•0=0	1•0=0	0•0=0
Сумарна				

оцінка випуску	**3.716414**	**1.063446**	**2.567171**	**3.276135**

Другою властивістю оцінок ресурсів є характеристика їх ефективності. Чим більше значення двоїстої оцінки (для обмежень типу “≤”), тим ефективнішим або дефіцитнішим є даний ресурс, тобто більш виправданими є заходи і витрати на збільшення його обсягів. Якщо оцінка відповідного ресурсу прийме нульове значення, то це означає, що даний ресурс є в залишку, обсяг якого подано в стовпці “Додаткова змінна”.

У системі LINA додаткові змінні мають стандартне позначення і позначаються через SLK *N*, де *N* – номер обмеження, якому вона відповідає. Під першим номером в системі завжди йде цільова функція, тоді фактичний номер кожного обмеження є збільшеним відповідно на одиницю.

У даному прикладі залишок обладнання (рядок 2) складає 54.96463 маш.-год., а фінансових коштів (рядок 5) – 217.0001 грн. Значення двоїстої оцінки ресурсу, який використано повністю, показує, на скільки одиниць зросте цільова функція *Z* при одиничному збільшенні запасу даного ресурсу. Так, додаткове залучення 1 люд.-год. праці приведе до збільшення випуску кінцевої продукції на 0.150523 одиниць (рядок 3), або додаткове використання фінансових ресурсів в розмірі 1 грн. дозволить збільшити цільову функцію на 0.699932 одиниць (рядок 4) при незмінності інших ресурсів.

За допомогою двоїстої оцінки можна також встановити норми заміни ресурсів, тобто визначити співвідношення, на основі яких ресурси можуть замінити один одного без зміни кінцевого результату *Z*. Заміну ресурсів необхідно проводити у відношенні, оберненому відношенню їх оцінок. Так у даному прикладі норма заміни електроенергії працею становить: $y_3 : y_2 = 0.699932 : 0.150523 = 4.65$, тобто 1 кВт.-год. електроенергії може замінити 4.65 людино-годин праці.

Для обмежень типу “≥” нульові значення додаткових змінних вказують на те, що ці обмеження виконуються як строгі рівності. В нашому випадку додаткові змінні шостого та сьомого рядків рівні нулю, а це значить, що продукції типу А та В потрібно виготовляти в мінімальному обсязі, а саме 20 % і 50 % кінцевої продукції. Значення двоїстих змінних цих рядочків вказують на зміну значення цільової функції при збільшенні на одиницю випуску продукції А та В понад мінімум. Тобто, якщо збільшити випуск продукції А на одиницю більше від 20%, то випуск кінцевої продукції зменшиться на 0.354482. Відповідно збільшення випуску продукції В на одиницю більше від 50% призведе до зменшення випуску кінцевої продукції на 1.858207 одиниць.

Додаткова змінна восьмого рядочка не дорівнює 0, а це означає, що продукції С виготовили на 160.6044 одиниць (значення додаткової змінної цього рядка) більше мінімального обсягу, який становив 30 % кінцевої продукції.

Наведені висновки мають місце в межах стійкості базисного розв’язку, які ми отримаємо, якщо наберемо ***Y*** після запитання “Постоптимальний аналіз *Y/N*?”:

Постоптимальний аналіз Y / N ?

? Y

Межі, в яких базис не змінюється

Межі коефіцієнтів ЦФ

Змінна	*Поточний коефіцієнт*	*Допустиме збільшення*	*Допустиме зменшення*
Z	*1.000000*	*Безмежність*	*1.000000*
X1	*.000000*	*2.531645*	*1.688172*
X2	*.000000*	*1.957552*	*Безмежність*
X3	*.000000*	*2.649573*	*.403226*
X4	*.000000*	*.840336*	*2.248736*

Межі правих частин

Рядок	*Поточна*	*Допустиме*	*Допустиме*

	RHS	*збільшення*	*зменшення*
2	*295.000000*	*Безмежність*	*54.964630*
3	*410.000000*	*61.050420*	*52.631040*
4	*505.000000*	*74.373210*	*65.450450*
5	*890.000000*	*Безмежність*	*217.000100*
6	*.000000*	*206.610100*	*49.296020*
7	*.000000*	*123.240000*	*200.483800*
8	*.000000*	*160.604400*	*Безмежність*

Ми отримали параметри стійкості базисного розв'язку відносно коефіцієнтів цільової функції. На основі отриманих результатів бачимо, що коефіцієнт при невідомій *Z* в цільовій функції можна збільшувати до безмежності, а допустиме його зменшення рівне 1. Базисний розв'язок при цьому змінюватись не буде, тобто базисними залишаться невідомі *Z, X1, X3* та *X4*, а вільною буде *X2*. Також додаткові змінні другого, п'ятого та восьмого рядків не дорівнюватимуть нулю, а значення додаткових змінних третього, четвертого, шостого і сьомого будуть рівні нулю.

Відповідно в цільову функцію можна ввести невідомі *X1*, *X2*, *X3* та *X4*, найбільші значення коефіцієнтів при яких становитимуть відповідно *2.531645; 1.957552; 2.649573; 0.840336*, а найменші (–1.*688172*) при *X1*, (–0.*403226*) при *X3* та *(–2.248736)* при *X4*; коефіцієнт при *X2* можна зменшувати до безмежності, оскільки ця невідома є вільною.

Проаналізуємо стійкість оптимального розв'язку відносно зміни початкових запасів виробничих ресурсів та мінімального обсягу виготовлення продукції А, В та С. Для повністю невикористаних ресурсів границі можливого збільшення не вказуються, тобто в нашому випадку запаси обладнання і фінансових коштів можна збільшувати до безмежності. Оптимальність плану зберігається при зменшенні запасу обладнання на 54.96463 машино-годин, а максимальна величина зменшення фінансових коштів становить 217.0001 грн. Максимально допустима величина збільшення використання праці становить 61.05042 людино-годин, а зменшення 52.63104 людино-годин. Відповідно розмір максимального збільшення використання електроенергії становить 74.37321 кВт.-год, а зменшення – 65.45045 кВт.-год. Випуск продукції А, В та С можна збільшити відповідно на 206.6101, 123.24 та 160.6044 одиниць, допустиме зменшення випуску продукції А та В становить 49.29602 і 200.4838 одиниць, а нижня межа випуску продукції С – безмежність, оскільки додаткова змінна восьмого рядка не рівна нулю.

Слід зазначити, що всі зміни потрібно проводити таким чином, щоб це не суперечило економічному змісту невідомих даної задачі.

Дальше розглянемо як буде змінюватись структура оптимального розв'язку при зміні або обсягів виробничих ресурсів, або обсягів гарантованого виробництва продукції, або включення в план невідомих величин, що не ввійшли в базисний розв'язок. Цей економічний аналіз ми можемо провести з допомогою коефіцієнтів заміщення останньої симплекс-таблиці, отриманих за допомогою команди TABL:

: TABL

Рядок	***(Базис)***	**Z**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**
1	ART	.000	.000	1.958	.000	.000
2	SLK 2	.000	.000	.712	.000	.000
3	X3	.000	.000	-.045	1.000	.000
4	X1	.000	1.000	.077	.000	.000
5	SLK 5	.000	.000	3.284	.000	.000
6	X4	.000	.000	.871	.000	1.000
7	Z	1.000	.000	1.958	.000	.000
8	SLK 8	.000	.000	-2.402	.000	.000

Рядок	**SLK 2**	**SLK 3**	**SLK 4**	**SLK 5**	**SLK 6**	**SLK 7**	**SLK 8**

1	.000	.151	.700	.000	.354	1.858	.000
2	1.000	-.169	-.338	.000	.266	-.106	.000
3	.000	.373	-.264	.000	-.021	.008	.000
4	.000	-.059	.224	.000	.210	-.084	.000
5	.000	-.793	-.689	1.000	-.268	.107	.000
6	.000	-.179	.167	.000	-.222	.089	.000
7	.000	.151	.700	.000	.354	1.858	.000
8	.000	.150	.196	.000	.503	-.801	1.000

Розглянемо випадок, коли основна невідома величина не включена в базис. Це означає, що при заданих умовах включення її в оптимальний план не є ефективне на величину відносної оцінки. При введенні в базис такої невідомої величини з одиничною інтенсивністю додатні коефіцієнти заміщення покажуть, на скільки зменшиться, а від'ємні – на скільки зростуть відповідні базисні невідомі. Такою невідомою величиною в нашому прикладі є X2.

Ми бачимо, що збільшення інтенсивності другої технології на 1 (введення в базис X2=1) приведе до наступної зміни розв'язку. Цільова функція (ART) зменшиться на 1.958, інтенсивність першої технологій відповідно зменшиться на 0.077, третьої зросте на 0.045, а четвертої зменшиться на 0.871 одиниць. У той самий час недовикористання (надлишок) обладнання (SLK 2) зменшиться на 0.712 машино-годин та фінансових коштів (SLK 5) – на 3.284 грн. (тобто використання обладнання і фінансових коштів зросте на величину цих коефіцієнтів заміщення), випуск кінцевої продукції *Z* зменшиться на 1.958 одиниць, а випуск продукції C понад мінімум (SLK 8) зросте на 2.402 одиниці.

Розглянемо вплив коефіцієнтів заміщення на базисний розв'язок у випадку збільшення запасів виробничих ресурсів. Якщо ресурс використано повністю, то додаткова невідома величина (залишок ресурсу) входить у число небазисних змінних і має нульове значення. Коефіцієнти заміщення останньої симплекс-таблиці для обмежень типу "≤" показують, на скільки збільшиться, якщо вони додатні, і на скільки зменшиться, якщо вони від'ємні, значення відповідних базисних змінних при одиничному збільшенні початкового запасу ресурсу. При зменшенні – навпаки. Наприклад, збільшимо початковий запас праці (SLK 3) на 1 людино-годину. Тоді на основі даних стовпця SLK 3 отримаємо, що цільова функція (ART) зросте на 0.151, надлишок обладнання (SLK 2) зменшиться на 0.169, інтенсивність третьої технології (X3) збільшиться на 0.373, а першої (X1) зменшиться на 0.059 одиниць, недовикористання фінансових ресурсів (SLK 5) зменшиться на 0.793 грн., інтенсивність четвертої технології (X4) зменшиться на 0.179, випуск кінцевої продукції *Z* зросте на 0.151 одиниць, випуск продукції С понад мінімум (SLK 8) зросте на 0.15 одиниць.

Перейдемо до розгляду випадку, коли додаткова невідома величина не ввійшла в базис і відповідає обмеженню виду "$\geq$". Це означає, що відповідна їй основна невідома величина ввійшла в базис у розмірі мінімального гарантованого обсягу виробництва, і дальше її збільшення призведе до зменшення кінцевого ефекту на величину двоїстої оцінки. Додаткові коефіцієнти заміщення останньої симплекс-таблиці показують зменшення, а від'ємні – збільшення відповідних базисних значень при одиничному збільшенні небазисних додаткових змінних обмежень типу "$\geq$".

Якщо збільшити випуск продукції В понад мінімум (SLK 7) на одиницю, то на основі значень коефіцієнтів заміщення стовпця SLK 7 значення цільової функції (ART) зменшиться на 1.858, надлишок обладнання (SLK 2) зросте на 0.106, інтенсивність третьої технології (X3) зменшиться на 0.008, а першої (X1) збільшиться на 0.084 одиниць, залишок фінансових ресурсів (SLK 5) зменшиться на 0.107 грн., інтенсивність четвертої технології (X4) зменшиться на 0.089, випуск кінцевої продукції *Z* зменшиться на 1.858 одиниць, випуск продукції С понад мінімум (SLK 8) зросте на 0.801 одиниць.

Лекція 3-4. **Багатокритеріальні оптимізаційні задачі.**

План

1. *Методи побудови компромісних планів...............*
2. *Модель оптимізації виробничої програми підприємства*

1. Методи побудови компромісних планів

Багатокритеріальні задачі дуже часто зустрічаються при оптимізації складних динамічних систем, якою є економіка. Це пов'язане не тільки з формальними труднощами вибору та обґрунтування єдиного критерію, але і з багатоцільовим характером функціонування економічної системи, коли необхідно приймати до уваги одночасно декілька показників ефективності (максимум прибутку, товарної та кінцевої продукції, рентабельності, мінімум собівартості і т. д.).

Відомо, що співпадання екстремальних значень двох і більше критеріїв можливе лише при випадковому збігу обставин і в практичних розрахунках їх отримання малоймовірне. Тому виникає задача вибору такого варіанту, який був би відносно однаково ефективним для множини найбільш привабливіших критеріїв. Такі задачі називаються багатокритеріальними з векторним критерієм оптимальності.

При розв’язанні задач даного класу необхідне виконання наступних умов: обґрунтування множини критеріїв для заданої задачі; кількісна оцінка відносної переваги критеріїв або побудова деякої шкали переваг; визначення умов можливого компромісу (вибір сценаріїв компромісу) та обґрунтування методу знаходження компромісного варіанту.

Множина можливих критеріїв визначається характерними властивостями економічному процесу і обґрунтовується на основі логічного аналізу. Після визначення необхідного набору критеріїв і їх відносної переваги можна перейти до вибору компромісного варіанту.

Умову компромісу можна сформулювати по різному: мінімізація відносних відхилень від оптимальних значень по всій множині критеріїв; фіксування одного з критеріїв на деякому заданому рівні і подальша оптимізація за наступним критерієм і т. д.

У відповідності до умов формулювання компромісу розроблено методи знаходження розв’язків багатокритеріальних задач.

У даний час для одержання компромісних варіантів існує ряд методів, серед яких особливу увагу заслуговують методи В. Садовського, І. Никовського, І. Саскі, Х. Юттлера, методи послідовних поступок, відносного показника та ін.

Для знаходження компромісного плану з врахуванням двох рівнозначних критеріїв можна використати метод І. Никовського. Даний метод дозволяє знайти такий компромісний варіант розв’язку, в якому відхилення кожного критерію від оптимального значення рівновеликі та мінімальні.

Алгоритм методу складається з наступних кроків. На першому кроці знаходимо розв’язок заданої задачі по кожному критерію окремо, тобто

$$Z_1 = \sum_{j=1}^{m} C_{1j} x_j \ (\max) \quad \text{та} \quad Z_2 = \sum_{j=1}^{m} C_{2j} x_j \ (\max)$$

при існуючій системі обмежень. У результаті отримуємо $Z_1^* = \max Z_1$ та $Z_2^* = \max Z_2$.

На другому кроці в систему обмежень моделі вводиться додаткова умова, яка вимірює відхилення кожного критерію від оптимального значення:

$$\left| \frac{Z_1^* - Z_1}{Z_1^*} \right| = \left| \frac{Z_2^* - Z_2}{Z_2^*} \right| \tag{5.6}$$

У нашому випадку задача розв'язується на максимум, тому додаткову умову можна записати наступним чином:

$$\frac{Z_1^*}{Z_1^*} - \frac{Z_1}{Z_1^*} = \frac{Z_2^*}{Z_2^*} - \frac{Z_2}{Z_2^*} \quad \text{або} \quad 1 - \frac{Z_1}{Z_1^*} = 1 - \frac{Z_2}{Z_2^*}. \tag{5.7}$$

Звідси маємо: $\dfrac{Z_1}{Z_1^*} = \dfrac{Z_2}{Z_2^*}$.

Отже, основна система обмежень доповниться умовою:

$$Z_2^* Z_1 - Z_1^* Z_2 = 0.$$

Далі задача розв'язується за одним із критеріїв Z_1 або Z_2.

Для знаходження компромісних розв'язків за двома або більше критеріями оптимальності особливо практичний інтерес представляє метод послідовних поступок, зміст алгоритму якого полягає в наступному. Нехай в якості критерію оптимальності вибрано *K* окремих економічних показники $Z_k(x) = \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_j$, $k = \overline{1, K}$. Для заданих показників ефективності встановлено їх ієрархію. Далі задача розв'язується з допомогою декількох послідовних етапів.

На першому етапі знаходиться розв'язок по найбільш важливому критерію, наприклад $Z_1(x)$. У результаті розв'язку отримаємо оптимальне значення $Z_1^* = \max Z_1(x)$. На другому етапі основну систему обмежень задачі доповнюємо додатковою умовою, яка забезпечує досягнення знайденого оптимального значення з деяким відхиленням ΔZ_1, тобто $Z_1(x) \geq Z_1^* - \Delta Z_1$.

Після цього дана задача розв’язується з врахуванням другого критерію оптимальності $Z_2(x)$. Якщо в наявності є третій критерій оптимальності, то з $Z_2(x)$ проводиться адекватна процедура $Z_1(x)$. Таким чином в систему обмежень буде введено другу додаткову умову: $Z_2(x) \geq Z_2^* - \Delta Z_2$.

Далі знаходимо оптимальне значення відносно третього критерію $Z_3(x)$ і якщо більше не існує критеріїв, то знайдений оптимальний розв’язок буде компромісний. У випадку існування інших критеріїв оптимальності процедура повторюється до повного перебору їх з множини існуючих. Якщо *l*-ий критерій оптимальності оцінюється на мінімум, то додаткове обмеження прийме вигляд: $Z_l(x) \leq Z_l^* + \Delta Z_l$.

Складність даного методу полягає в знаходженні величини відхилень ΔZ_k. Для її знаходження доцільно використати двоїсті оцінки.

Більш об’єктивно можна оцінити компромісний варіант розв’язку з допомогою методу відносного показника. На першому етапі розв’язується *K* однокритеріальних задач

$$Z_k(x) = \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_j \rightarrow \max_{k=\overline{1,K}}(\min) \qquad (5.8)$$

при виконанні однієї і тієї ж системи обмежень.

На другому етапі формується нова задача, в якій до основної системи обмежень додатково включається обмеження виду:

$$\left|\frac{Z_k^* - \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_j}{Z_k^*}\right| \le Z, \quad \text{або} \quad \left|\frac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^*}\right| \le Z, \ \mathrm{k} = \overline{1,k}. \qquad (5.9)$$

Система нерівностей (5.9) еквівалентна наступній системі:

$$\begin{cases} \dfrac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^*} \le Z \\ \dfrac{Z_k^* - Z_k(x)}{Z_k^*} \ge -Z \end{cases}$$

а після перетворень

$$\begin{cases} Z_k(x) + Z_k^* Z \ge Z_k^* \\ Z_k(x) - Z_k^* Z \le Z_k^* \end{cases} \qquad (5.10)$$

$$k = \overline{1, K}.$$

Отже, основна система обмежень буде включати в себе $2K$ додаткових умов виду (5.10). Для отримання компромісного розв'язку далі необхідно знайти розв'язок доповненої задачі, прийнявши за критерій оптимальності $\min Z$.

Знайдений розв'язок задачі за приведеною методикою дає можливість одержати мінімальну верхню границю для відносних відхилень від всіх максимальних значень цільових функцій, одержаних в результаті розв'язку K однокритеріалних задач. Це дозволяє одержати компромісний розв'язок поставленої задачі.

2. Модель оптимізації виробничої програми підприємства

Розглянемо постановку задачі оптимізації виробничої програми підприємства та побудуємо її економіко-математичну модель.

Для організації виробництва m видів продукції підприємство має в наявності n видів виробничих ресурсів, по яких задано обсяги запасів та норми їх використання на одиницю випуску продукції.

Відомий ринковий попит на окремі види продукції, а також ефективність їх виробництва (ціна, прибуток від одиниці продукції, собівартість одиниці продукції і т.д.). Необхідно побудувати модель оптимізації виробничої програми підприємства для випуску різних видів продукції на основі наявних ресурсів. В якості критерію ефективності прийняти або прибуток, або валову продукцію, або собівартість.

Для побудови економіко-математичної моделі задачі введемо наступні позначення: i – індекс виду ресурсу, $i=\overline{1,n}$; j – індекс виду продукції, $j=\overline{1,m}$; k – індекс критерію оптимальності, $k=\overline{1,K}$; a_{ij} – норма використання i-го виду ресурсу на випуск одиниці продукції j-го виду; A_i – обсяг запасів i-го виду ресурсу; B_l – величина договірних поставок на l-го виду продукцію; C_{kj} – величина ефективності k-го критерію оптимальності від випуску одиниці продукції j-го виду; x_j – невідома величина, яка означає обсяг випуску продукції j-го виду; M_1 – множина видів продукції, для яких існують фіксовані договірні поставки; M_2 – множина видів продукції, для яких встановлюється нижня та верхня межа ринкового попиту; α_s, β_s – відповідно нижня та верхня межа ринкового попиту на продукцію s-го виду.

Враховуючи введені позначення, математична модель прийме вигляд: знайти розв’язок $\{x_j \geq 0,\ j=\overline{1,m}\}$, який забезпечить

$$Z_k = \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_j \to \max_{k=\overline{1,K}}(\min), \tag{5.11}$$

при виконанні умов:

1) по використанню обсягів наявних ресурсів

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq A_i,\ i=\overline{1,n}; \tag{5.12}$$

2) по виконанню фіксованих умов відносно поставки продукції

$$x_l = B_l, \quad l = M_1; \tag{5.13}$$

3) по випуску продукції з врахуванням ринкового попиту

$$\alpha_s \le x_s \le \beta_s, \quad s \in M_2. \tag{5.14}$$

Приклад 5.2. Для виготовлення чотирьох видів продукції підприємство використовує п'ять видів ресурсів (праця, обладнання, сировина, електрична енергія та фінансові кошти), обсяги запасів яких обмежені. На плановий період відомі: матриця нормативів витрат ресурсів $[a_{ij}]$, де i – індекс ресурсу, j – індекс виду продукції; прибуток C_j = (14; 18; 22; 11) від реалізації одиниці продукції j-го виду; запас i-того виду ресурсу A_i=(640; 845; 2015; 4205; 2150); мінімальний випуск продукції першого виду B_1 = 310 та ціна одиниці j-го виду продукції P_j=(35; 30; 43; 29).

Побудувати компромісний план виробничої програми підприємства з урахуванням двох критеріїв оптимальності (прибуток та валова продукція).

$$\left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.15 & 0.5 & 0.42 & 0.18 \\ 1.1 & 1.35 & 1.12 & 1.26 \\ 2 & 2.5 & 3.1 & 1.8 \\ 1.5 & 1.4 & 1.36 & 1.2 \end{bmatrix}$$

♦***Розв'язування***.

Для побудови числової моделі задачі введемо невідомі величини x_1, x_2, x_3, x_4, які відповідно означають розміри випуску підприємством продукції першого, другого, третього та четвертого видів.

Розв'яжемо окремо задачу за кожним із запропонованих критеріїв.

Спочатку розглянемо задачу, в якій за критерій оптимальності візьмемо максимум прибутку: необхідно знайти такий розв'язок $\{x_j \ge 0, j = \overline{1,4}\}$, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток (Z_1):

$$Z_1 \to \max$$

при виконанні умов:

1) по використанню праці

$$0.4x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + 0.6x_4 \le 640$$

2) по використанню обладнання

$$0.15x_2 + 0.5x_2 + 0.42x_3 + 0.18x_4 \le 845$$

3) по використанню сировини

$$1.1x_1 + 1.35x_3 + 1.12x_3 + 1.26x_4 \le 2015$$

4) по використанню електричної енергії

$$2x_1 + 2.5x_2 + 3.1x_3 + 1.8x_4 \le 4205$$

5) по використанню фінансових коштів

$$1.5x_1 + 1.4x_3 + 1.36x_3 + 1.2x_4 \le 2150$$

по виконанню договірних умов відносно випуску продукції першого виду $x_1 \ge 310$

7) - 8) щоб дізнатися числові значення прибутку і валового випуску, запишемо в системі обмежень рівняння, якими вони задаються:

$$Z_1 - 14x_1 - 18x_2 - 22x_3 - 11x_4 = 0$$
$$Z_2 - 35x_1 - 30x_2 - 43x_3 - 25x_4 = 0.$$

Розв’яжемо дану задачу з допомогою пакету LINA. Введемо цільову функцію та систему обмежень побудованої задачі:

```
:MAX    Z1
? ST
? .4 X1 + .2 X2 + .3 X3 + .6 X4 <=   640
? .15 X1 + .5 X2 + .42 X3 + .18 X4 <=   845
? 1.1 X1 + 1.35 X2 + 1.12 X3 + 1.26 X4 <=   2015
? 2 X1 + 2.5 X2 + 3.1 X3 + 1.8 X4 <=   4205
? 1.5 X1 + 1.4 X2 + 1.36 X3 + 1.2 X4 <=   2150
? X1 >=   310
?  Z1 - 14 X1 - 18 X2 - 22 X3 - 11 X4 =    0
? Z2- 35 X1 - 30 X2 - 43 X3 - 29 X4  =    0
? END
```

Для одержання оптимального розв’язку задачі використаємо команду GO.

: GO

Значення цільової функції

1) 29877.4500

Змінна	**Значення**	**Відносна оцінка**
Z1	29877.450000	.000000
X1	310.000000	.000000
X2	370.106200	.000000
X3	857.978900	.000000
X4	.000000	2.123404
Z2	58846.280000	.000000
Рядок	**Додаткова змінна**	**Двоїста змінна**
2)	184.585100	.000000
3)	253.095800	.000000
4)	213.420200	.000000
5)	.000000	6.723405
6)	.000000	.851062
7)	.000000	-.723404
8)	.000000	1.000000
9)	.000000	.000000

Ми бачимо, що згідно оптимального розв’язку підприємство одержить максимальний прибуток в розмірі Z_1^*= 29877.45 грн., валовий випуск продукції при цьому Z_2 =58846.28. Випуск продукції відповідних видів буде: першого – X1=310, другого – X2=370.1; третього – X3=857.98, четвертий вид продукції виготовляти не вигідно – X4=0. При збільшенні випуску продукції четвертого виду на одиницю значення цільової функції (максимальний прибуток) зменшиться на значення відносної оцінки (на 2.12).

Виконаємо економіко-математичний аналіз одержаних розрахунків.

Проведемо аналіз одержаного розв’язку задачі із використанням основних властивостей двоїстих оцінок. Насамперед необхідно пам’ятати, що всі враховані ресурси та види продукції оцінюються в одиницях виміру цільової функції. Таким чином, значення двоїстих змінних дають можливість співставити різні затрати і результати та давати оцінку різних заходів з врахуванням їх впливу на критерій оптимальності. У розглянутому прикладі двоїсті оцінки вказують на зміну прибутку, яка виникає внаслідок зміни в деяких границях наявних ресурсів та завдань по випуску продукції. Найвищу оцінку одержала електроенергія. Введення у виробничий процес додаткової одиниці електроенергії (рядок 5) може привести до збільшення прибутку на 6.72 грн., на дану величину прибуток зменшиться при вилученні одиниці електроенергії. Оцінка фінансових коштів є нижчою – 0.85 грн. (рядок 6).

Чим більше значення двоїстої оцінки, тим ефективнішим або дефіцитнішим є даний ресурс, тобто більш виправданими є заходи і затрати на збільшення його обсягів. Якщо двоїста оцінка відповідного ресурсу приймає нульове значення, то це означає, що даний ресурс є в залишку.

Обсяг залишку ресурсу приводиться у стовпці “додаткова змінна”. Так, у нашому прикладі залишок праці (рядок 2) становить 184.59, залишок обладнання (рядок 3) – 253.1, а недовикористання сировини (рядок 4) – 213.42 одиниці.

Оцінка обмеження по випуску першого виду продукції показує, що її потрібно виготовляти в мінімальному обсязі (310 одиниць). Збільшення випуску цієї продукції на одиницю приведе до зменшення цільової функції на значення двоїстої оцінки (рядок 7), тобто максимальний прибуток зменшиться на 0.72 грн.

З допомогою команди TABL одержимо зміст останньої симплекс-таблиці.

Рядок (Базис)	**Z1**	**X1**	**X2**	**X3**	**X4**
1 ART	.000	.000	.000	.000	2.123
2 SLK 2	.000	.000	.000	.000	.483

3	SLK 3	.000	.000	.000	.000	-.282
4	SLK 4	.000	.000	.000	.000	.005
5	X3	.000	.000	.000	1.000	-.511
6	X2	.000	.000	1.000	.000	1.353
7	X1	.000	1.000	.000	.000	.000
8	Z1	1.000	.000	.000	.000	2.123
9	Z2	.000	.000	.000	.000	-10.362

Рядок	**Z2**	**SLK 2**	**SLK 3**	**SLK 4**	**SLK 5**	**SLK 6**	**SLK 7**
1	.000	.000	.000	.000	6.723	.851	.723
2	.000	1.000	.000	.000	-.157	.138	.293
3	.000	.000	1.000	.000	.098	-.532	-.452
4	.000	.000	.000	1.000	.285	-1.473	-.540
5	.000	.000	.000	.000	1.489	-2.660	-1.011
6	.000	.000	.000	.000	-1.447	3.298	2.053
7	.000	.000	.000	.000	.000	.000	-1.000
8	.000	.000	.000	.000	6.723	.851	.723
9	1.000	.000	.000	.000	20.638	-15.426	-16.862

Проведемо економічний аналіз на основі коефіцієнтів заміщення останньої симплекс-таблиці. Розглянемо вплив коефіцієнтів заміщення на базисний розв’язок у випадку включення в базис вільної змінної, в нашому випадку X4. Додатні коефіцієнти заміщення показують зменшення, а від’ємні – збільшення значень базисних змінних. Якщо збільшити випуск продукції четвертого виду на одиницю, то цільова функція (ART) зменшиться на 2.123, залишок праці (SLK 2) зменшиться на 0.483, залишок обладнання (SLK 3) зросте на 0.282, недовикористання сировини (SLK 4) зменшиться на 0.005, випуск продукції третього виду X3 зросте на 0.511, випуск продукції другого виду X2 зменшиться відповідно на 1.353, випуск продукції першого виду X1 залишиться без змін, максимальний прибуток Z1 зменшиться на 2.123, а валовий випуск продукції Z2 збільшиться на 10.362.

Для обмежень типу “≤” (в нашому прикладі це обмеження по використанню ресурсів) коефіцієнти заміщення показують, на скільки збільшиться, якщо вони додатні, і на скільки зменшиться, якщо вони від’ємні, значення відповідних базисних змінних при одиничному збільшенні початкового запасу ресурсу. Наприклад, в нашому випадку залишок електроенергії рівний нулю. Збільшимо початковий запас електроенергії на 1. Тоді на основі даних стовпця SLK 5 отримаємо, що цільова функція (ART) зросте на 6.723, залишок праці (SLK 2) зменшиться на 0.157, недовикористання обладнання (SLK 3) зросте на 0.098, залишок сировини (SLK 4) збільшиться на 0.285, випуск продукції третього виду X3 зросте на 1.489, випуск продукції другого виду X2 зменшиться відповідно на 1.447, випуск продукції першого виду X1 залишиться без змін, максимальний прибуток Z1 зросте на 6.723, а валовий випуск продукції Z2 збільшиться на 20.638.

Розглянемо коефіцієнти заміщення для обмежень типу “≥”. Додатні коефіцієнти а для обмежень такого типу вказують на зменшення, а від’ємні – на збільшення значень базисних змінних при збільшенні правих частин цих обмежень на одиницю. В нашій задачі – це обмеження по мінімальному розміру випуску продукції першого виду. На основі даних стовпця SLK 7 ми бачимо, що при збільшенні виготовлення продукції першого виду на одиницю цільова функція (ART) зменшиться на 0.723, залишок праці (SLK 2) зменшиться на 0.293, недовикористання обладнання (SLK 3) зросте на 0.452, залишок сировини (SLK 4) збільшиться на 0.54, випуск продукції третього виду X3 зросте на 1.011, випуск продукції другого виду X2 зменшиться відповідно на 2.053, випуск продукції першого виду X1 збільшиться на 1, максимальний прибуток Z1 зменшиться на 0.723, а валовий випуск продукції Z2 збільшиться на 16.862.

Тепер розглянемо задачу, в якій за критерій оптимальності візьмемо максимум валової продукції при тих же обмеженнях:

```
:MAX     Z2
? ST
? .4 X1 + .2 X2 + .3 X3 + .6 X4 <=   640
? .15 X1 + .5 X2 + .42 X3 + .18 X4 <=   845
? 1.1 X1 + 1.35 X2 + 1.12 X3 + 1.26 X4 <=   2015
? 2 X1 + 2.5 X2 + 3.1 X3 + 1.8 X4 <=   4205
? 1.5 X1 + 1.4 X2 + 1.36 X3 + 1.2 X4 <=   2150
? X1 >=   310
? Z1 - 14 X1 - 18 X2 - 22 X3 - 11 X4 =    0
? Z2- 35 X1 - 30 X2 - 43 X3 - 29 X4  =    0
      ? END
```

Використаємо команду GO і в результаті одержимо:

Значення цільової функції

1)   61885.7500

Змінна	**Значення**	**Відносна оцінка**
Z1	29747.050000	.000000
X1	490.259000	.000000
X2	.000000	8.212437
X3	1040.156000	.000000
X4	.000000	.751295
Z2	61885.750000	.000000

Рядок	**Додаткова змінна**	**Двоїста змінна**
2)	131.849700	.000000
3)	334.595900	.000000
4)	310.740900	.000000

5)	.000000	8.756476
6)	.000000	11.658030
7)	180.259000	.000000
8)	.000000	.000000
9)	.000000	1.000000

Бачимо, що максимальний валовий випуск продукції становитиме $Z_2^* =$61885.75 грн. (прибуток при цьому становитиме Z_1 = 29747.05 грн.), якщо продукції першого виду виготовити 490.26 одиниць, другого – не виготовляти; третього – 1040.16, четвертий вид продукції виготовляти теж не вигідно. Якщо виготовити одиницю продукції другого чи четвертого виду, то значення цільової функції (максимального валового випуску) зменшиться на значення відносної оцінки, тобто відповідно на 8.21 чи 0.75.

По значеннях двоїстих змінних бачимо, що праця, обладнання та сировина є в надлишку (недовикористані на величину додаткових змінних другого, третього та четвертого рядків) відповідно 131.85, 334.6 та 310.74 одиниць. Електроенергія та фінансові ресурси використані повністю (двоїсті змінні для них не рівні 0) і якщо збільшимо на 1 запас електричної енергії чи фінансових ресурсів, то максимальний валовий випуск зросте відповідно на 8.75 чи 11.65 (значення двоїстих змінних п’ятого та шостого рядків). Отже при знаходженні максимуму валового випуску продукції дефіцитнішими є фінансові кошти.

Двоїста змінна сьомого рядочка не дорівнює нулю і відповідає обмеженню типу “≥” $(x_1 \geq 310)$. Це означає, що продукції першого виду потрібно виготовити на 180.26 (значення додаткової змінної сьомого рядка) одиниць більше мінімального обсягу.

Команда TABL дає нам останню симплекс-таблицю розв’язаної задачі:

Рядок (Базис)		Z1	X1	X2	X3	X4
1	ART	.000	.000	8.212	.000	.751
2	SLK 2	.000	.000	-.142	.000	.290
3	SLK 3	.000	.000	.220	.000	.016
4	SLK 4	.000	.000	.263	.000	.361
5	X3	.000	.000	.492	1.000	.155
6	X1	.000	1.000	.487	.000	.659
7	SLK 7	.000	.000	.487	.000	.659
8	Z1	1.000	.000	-.352	.000	1.647
9	Z2	.000	.000	8.212	.000	.751

Рядок	Z2	SLK 2	SLK 3	SLK 4	SLK 5	SLK 6	SLK 7
1	.000	.000	.000	.000	8.756	11.658	.000
2	.000	1.000	.000	.000	.049	-.332	.000
3	.000	.000	1.000	.000	-.221	.194	.000
4	.000	.000	.000	1.000	-.095	-.606	.000
5	.000	.000	.000	.000	.777	-1.036	.000
6	.000	.000	.000	.000	-.705	1.606	.000
7	.000	.000	.000	.000	-.705	1.606	1.000
8	.000	.000	.000	.000	7.233	-.311	.000
9	1.000	.000	.000	.000	8.756	11.658	.000

На основі цих результатів ми можемо дізнатися, які зміни розв’язку і даних задачі відбудуться, якщо небазисну змінну ввести в базис. Наприклад, невідома *X2* небазисна (рівна 0), тобто продукцію другого виду випускати невигідно. Якщо ми цю змінну введемо в базис з одиничною інтенсивністю, тобто виготовимо одиницю продукції другого виду, то при цьому:

- максимальне значення цільової функції зменшиться на 8.212;

- надлишок праці зросте на 0.142;
- недовикористання обладнання зменшиться на 0.22;
- залишок сировини зменшиться на 0.263;
- виготовлення продукції третього виду зменшиться на 0.492;
- виготовлення продукції першого виду зменшиться на 0.487;
- прибуток зросте на 0.352;
- валовий випуск продукції зменшиться на 8.212.

Якщо ввести в базис SLK 6 (обмеження "≤") з одиничною інтенсивністю, тобто, якщо збільшимо на одиницю запас фінансових ресурсів, то при цьому:

- максимальне значення цільової функції зросте на 11.658;
- надлишок праці зменшиться на 0.332;
- недовикористання обладнання зросте на 0.194;
- залишок сировини зменшиться на 0.606;
- виготовлення продукції третього виду зменшиться на 1.036;
- виготовлення продукції першого виду збільшиться на 1.606;
- прибуток зменшиться на 0.311;
- валовий випуск продукції зросте на 11.658.

На третьому етапі розглянемо задачу, яка включатиме в себе всі основні обмеження першої та другої задач, а також чотири додаткових обмеження відносно максимального значення прибутку з першої задачі та максимального валового випуску продукції з другої задачі. Врахувавши, що Z_1^*= 29877.45, а Z_2^*=61885.75, маємо:

$$Z1 + 29877.45Z \geq 29877.451$$
$$Z1 - 29877.45Z \leq 29877.45$$
$$Z2 + 61885.75Z \geq 61885.75$$
$$Z2 - 61885.75Z \leq 61885.75$$

Цільовою функцією задачі буде MIN *Z*. Отже, в цілому нами буде одержано наступну задачу:

:MIN Z

```
? ST
? .4 X1 + .2 X2 + .3 X3 + .6 X4 <=   640
? .15 X1 + .5 X2 + .42 X3 + .18 X4 <=   845
? 1.1 X1 + 1.35 X2 + 1.12 X3 + 1.26 X4 <=   2015
? 2 X1 + 2.5 X2 + 3.1 X3 + 1.8 X4 <=   4205
? 1.5 X1 + 1.4 X2 + 1.36 X3 + 1.2 X4 <=   2150
? X1 >=   310
? Z1 - 14 X1 - 18 X2 - 22 X3 - 11 X4 =    0
? Z2 - 35 X1 - 30 X2 - 43 X3 - 29 X4 =    0
? Z1 + 29877.45 Z >=   29877.45
? Z1 - 29877.45 Z <=   29877.45
? Z2 + 61885.75 Z >=   61885.75
? Z2 - 61885.72 Z <=   61885.75
? END
```

Використовуючи пакет LINA, одержимо оптимальний розв’язок даної задачі.

Значення цільової функції

1) .400836500E-02

Змінна	**Значення**	**Відносна оцінка**
Z1	29757.690000	.000000
X1	475.547300	.000000
X2	30.205620	.000000
X3	1025.287000	.000000
X4	.000000	.000052
Z2	61637.690000	.000000
Z	.004008	.000000

Рядок	**Додаткова змінна**	**Двоїста змінна**
2)	136.153700	.000000
3)	327.944300	.000000
4)	302.798200	.000000

5)	.000000	.000234
6)	.000000	.000006
7)	165.547300	.000000
8)	.000000	.000000
9)	.000000	.000000
10)	.000000	-.000031
11)	239.519200	.000000
12)	.000000	-.000001
13)	496.121100	.000000

Ми одержали компромісний варіант виробничої програми підприємства, згідно якого потрібно виготовляти продукцію першого виду в розмірі 475.55 одиниць, другого – 30.21 одиниць, третього – 1025.29 одиниць, а продукцію четвертого виду виготовляти не вигідно. При цьому прибуток становитиме 29757.69 грошових одиниць, а валовий випуск – 61637.69 грошових одиниць. Праця, обладнання та сировина є в надлишку відповідно 136.15, 327.94 та 302.8 одиниць. Електроенергія та фінансові кошти використані повністю. Додаткова змінна сьомого рядка рівна 165.55, що свідчить про те, що для компромісного плану продукції першого виду потрібно виготовляти на 165.55 одиниць більше мінімального обсягу. Всі отримані результати представимо у вигляді таблиці 5.3:

Таблиця 5.3

ПОКАЗНИК	Варіанти виробничої програми з врахуванням критеріїв оптимальності		
	Прибуток	Валова продукція	Компромісний план

Випуск продукції	першого виду другого виду третього виду четвертого виду	310.0 370.1 857.98 0.0	490.26 0.0 1040.16 0.0	475.55 30.21 1025.29 0.0
Залишок ресурсів	Праця Обладнання Сировина Електроенергія Фінансові кошти	184.59 253.1 213.42 0.0 0.0	131.85 334.6 310.74 0.0 0.0	136.15 327.94 302.8 0.0 0.0
Прибуток Валова продукція		29877.45 58846.28	29747.05 61885.75	29757.69 61637.69

Лекція 5. **Модель оптимального розподілу фінансових ресурсів.**

Досить часто фінансовим процесам властивий динамічний характер, тобто ми маємо справу з процесами, які функціонують і розвиваються у просторі чи часі. Розв'язання такого типу задач здійснюється шляхом їх розкладу на відносно невеликі та менш складні підзадачі. Для цього підходу характерним є розв'язок задачі з допомогою ряду етапів, пов'язаних між собою керованою змінною. Набір рекурентних обчислювальних процедур, які зв'язують між собою різні етапи, забезпечує отримання оптимального розв'язку задачі в цілому при завершенні останнього етапу.

Розглянемо виробничу ситуацію, пов'язану з аналізом пропозицій відносно збільшення виробничих потужностей підприємств фірми. Для можливого розширення потужностей фірма виділяє фінансові ресурси розміром ***x***, які необхідно розділити між проектами в такий спосіб, щоб одержати максимально можливий сумарний приріст випуску продукції.

Позначимо через x_i – розмір інвестицій, виділених під i–тий проект ($i = \overline{1, n}$), де i – індекс проекту. Отже, має місце рівність:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x. \tag{5.15}$$

На основі попереднього аналізу встановлено, що приріст продукції внаслідок реалізації i–го проекту задається функцією $f_i(x_i)$. Тоді сумарний приріст продукції фірми становитиме:

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i). \tag{5.16}$$

Отже, наша задача полягає у заходженні таких значень $x_i \ge 0\ (i = \overline{1,n})$, які задовольняють (5.15) і забезпечують максимум функції (5.16).

Позначимо максимальний сумарний приріст продукції, одержаний при розподілі інвестицій розміром ***x*** для перших *k* проектів через $F_k(x)$, причому

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \ge 0, i = \overline{1,k}.$$

Для визначення функцій $F_k(x)$ побудуємо рекурентне рівняння за допомогою наступних етапів.

Почнемо з розподілу наявних засобів для першого проекту. Знайдемо максимальне значення цього приросту за формулою: $F_1(x) = \max\limits_{0 \le x_1 \le x}\left[f_1(x)\right] = f_1(x)$.

Переходимо до другого етапу розрахунків. Нам необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій розміром ***x***, при умові, що вони виділені першому та другому проекту. Тут слід враховувати отриману найкращу ефективність для першого проекту. Припустимо, що на другий проект виділені інвестиції розміром x_2, які дають $f_2(x_2)$ приросту продукції, а залишок $(x\text{-}x_2)$ виділяється першому проекту, і він дає $F_1(x\text{-}x_2)$ приросту. Тоді максимальний приріст продукції, отриманий від оптимального розподілу всіх інвестицій між першим і другим проектами буде:

$$F_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x}\left[f_2(x_2) + F_1(x - x_2)\right].$$

Переходимо до третього етапу, на якому необхідно знайти оптимальний варіант розподілу інвестицій при умові, що вони виділяються для перших трьох проектів разом.

Нехай на третій проект виділено x_3 одиниць коштів, які в свою чергу даватимуть для нього приріст продукції розміром $f_3(x_3)$. Наявний залишок $(x\text{-}x_3)$ надамо першому та другому проектам, які при оптимальному розподілі дають приріст $F_2(x\text{-}x_3)$ грошових одиниць. Отже, максимальний ефект, який отримується від розподілу інвестицій між першими трьома проектами буде:

$$F_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} \left[f_3(x_3) + F_2(x - x_3) \right].$$

Розглянемо загальний випадок розподілу інвестицій для перших k проектів. Нехай k–му проекту виділено x_k одиниць інвестицій, які забезпечать йому приріст продукції розміром $f_k(x_k)$. Залишок інвестицій $(x\text{-}x_k)$ віддамо першим $(k\text{-}1)$ проектам і вони при оптимальному розподілі принесуть фірмі $F_{k-1}(x\text{-}x_k)$ приросту продукції. При цьому фірма отримає сумарний приріст продукції рівний:

$$F_k(x) = \max_{0 \le x_k \le x} \left[f_k(x_k) + F_{k-1}(x - x_k) \right] \tag{5.17}$$

Отже, ми вивели рекурентне співвідношення (5.17), яке представляє собою рівняння Р.Беллмана для задачі (5.15) - (5.16).

Приклад 5.3. Для збільшення випуску продукції фірма може виділити інвестиції розміром x=200 млн. грн. своїм чотирьом підприємствам на певний період. Приріст продукції, який може отримати кожне підприємство при виділенні йому відповідних інвестицій, представлений у таблиці 5.4. Знайти оптимальний варіант вкладів інвестицій і дати економічний аналіз ефективності проведених заходів.

Таблиця 5.4

Розмір інвестицій, млн. грн., x	Приріст продукції, млн.грн.			
	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	0	0
50	45	60	55	70
100	110	90	85	105
150	160	165	170	155
200	210	215	225	230

♦***Розв'язування.***

Для знаходження оптимального варіанту розподілу наявних інвестицій використаємо функціональне рівняння (5.17). Розрахунки проведемо в чотири етапи. Насамперед знайдемо умовно оптимальне значення варіанту розподілу виділених інвестицій для першого підприємства. Вважаємо, що підприємство це окремий проект.

Для прискорення розрахунків усі значення $F_k(x_k)$ на наступних етапах представимо таблицею 5.5.

Таблиця 5.5

Розмір інвестицій, млн. грн., ***x***	Значення приросту продукції, млн. грн.			
	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
0	0	0	0	-
50	45	60	60	-
100	110	110	115	-
150	160	170	170	-
200	210	220	230	240

Оскільки, $F_1(x) = \max\limits_{0 \le x_1 \le x}\left[f_1(x) \right] = f_1(x)$, то переходимо до визначення умовно оптимального значення розподілу інвестицій, виділених двом першим підприємствам разом. Для цього використаємо формулу:

$$F_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x}\left[f_2(x_2) + F_1(x - x_2) \right],$$

у якій надамо x_2 усіх можливих значень (0; 50; 100; 150; 200).

$$F_2(0) = 0.$$

Розглянемо випадок розподілу інвестицій розміром 50 млн. грн.

Отримаємо:

$$F_2(50) = \max\left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(50) = 0 + 45 = 45 \\ \underline{f_2(50) + F_1(0) = 60 + 0 = 60} \end{array} \right\} = 60.$$

Максимальне значення приросту продукції від вкладення 50 млн. грн. в перших два підприємства одержано за рахунок другого члена, тобто

$f_2(50)+F_1(0)$. Це означає, що другому підприємству слід виділити 50 млн. грн., а першому не надавати коштів.

Аналогічно проводимо обчислення $F_2(x)$ для інших значень вкладень (100; 150; 200).

Так, при виділенні першим двом підприємствам 100 млн. грн. маємо:

$$F_2(100) = \max \left\{ \begin{array}{l} \underline{f_2(0) + F_1(100) = 0 + 110 = 110} \\ f_2(50) + F_1(50) = 60 + 45 = 105 \\ f_2(100) + F_1(0) = 90 + 0 = 90 \end{array} \right\} = 110.$$

Одержаний результат показує, що першому підприємству інвестиції потрібно виділити розміром 100 млн. грн., а другому – коштів не давати. Приріст продукції при цьому буде 110 млн. грн.

$$F_2(150) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(150) = 0 + 160 = 160 \\ \underline{f_2(50) + F_1(100) = 60 + 110 = 170} \\ f_2(100) + F_1(50) = 90 + 45 = 135 \\ f_2(150) + F_1(0) = 165 + 0 = 165 \end{array} \right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. доцільно 100 млн. грн. дати першому підприємству, а 50 – другому.

Проведемо аналогічні міркування для розподілу 200 млн. грн.

Записуємо:

$$F_2(200) = \max \left\{ \begin{array}{l} f_2(0) + F_1(200) = 0 + 210 = 210 \\ \underline{f_2(50) + F_1(150) = 60 + 160 = 220} \\ f_2(100) + F_1(100) = 90 + 110 = 200 \\ f_2(150) + F_1(50) = 165 + 45 = 210 \\ f_2(200) + F_1(0) = 215 + 0 = 215 \end{array} \right\} = 220.$$

Згідно з виразом $f_2(50)+F_1(150)$, який забезпечує максимальний приріст продукції обсягом 220 млн. грн., необхідно 150 млн. грн. віддати першому підприємству, а 50 млн. грн. – другому.

Перейдемо до третього етапу, в якому потрібно визначити оптимальний варіант розподілу інвестицій першим трьом підприємствам разом. Для розрахунку значень $F_3(x)$ використаємо формулу:

$$F_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x}\left[f_3(x_3) + F_2(x - x_3)\right].$$

Надаючи $x_3=(0;\ 100;\ 200;\ 300;\ 400;\ 500)$ відповідно одержимо:

$$F_3(0) = 0.$$

$$F_3(50) = \max\left\{\begin{array}{l} \underline{f_3(0) + F_2(50) = 0 + 60 = 60} \\ f_3(50) + F_2(0) = 55 + 0 = 55 \end{array}\right\} = 60.$$

Бачимо, що вигідно всі 50 млн. грн. віддати першим двом підприємствам, а третьому не давати коштів. Максимальний приріст продукції буде 60 млн. грн.

Виконаємо відповідні обчислення при $x_3=100$:

$$F_3(100) = \max\left\{\begin{array}{l} f_3(0) + F_2(100) = 0 + 110 = 110 \\ \underline{f_3(50) + F_2(50) = 55 + 60 = 115} \\ f_3(100) + F_2(0) = 85 + 0 = 85 \end{array}\right\} = 115.$$

Максимальний ефект дає вираз $f_3(50)+F_2(50)$, а це означає, що 100 млн.грн. між першими трьома підприємствами потрібно розподілити таким чином: першим двом підприємствам віддати 50 млн. грн. і третьому 50 млн. грн. Приріст продукції становитиме 115 млн. грн.

Обчислимо $F_3(150)$:

$$F_3(150) = \max\left\{\begin{array}{l} \underline{f_3(0) + F_2(150) = 0 + 170 = 170} \\ f_3(50) + F_2(100) = 55 + 110 = 165 \\ f_3(100) + F_2(50) = 85 + 60 = 145 \\ \underline{f_3(150) + F_2(0) = 170 + 0 = 170} \end{array}\right\} = 170.$$

При розподілі 150 млн. грн. ми отримали два оптимальних варіанти:

1) між першими двома підприємствами розподілити 150 млн. грн., а третьому не надавати коштів;
2) 150 млн. грн. віддати третьому підприємству, а першим двом не надавати коштів.

В обох випадках максимальний приріст продукції становитиме 170 млн. грн.

На завершення даного етапу проведемо аналіз розподілу 200 млн. грн. між першими трьома підприємствами:

$$F_3(200) = \max\left\{\begin{array}{l} f_3(0) + F_2(200) = 0 + 220 = 220 \\ f_3(50) + F_2(150) = 55 + 170 = 225 \\ f_3(100) + F_2(100) = 85 + 110 = 195 \\ \underline{f_3(150) + F_2(50) = 170 + 60 = 230} \\ f_3(200) + F_2(0) = 225 + 0 = 225 \end{array}\right\} = 230.$$

Ми бачимо, що найбільший приріст продукції 230 млн. грн. отримаємо, якщо 50 млн. грн. розподілимо між першими двома підприємствами, а в третє інвестуємо 150 млн. грн.

Переходимо до четвертого етапу, в якому необхідно проаналізувати ефективність розподілу наявних інвестицій уже між чотирма підприємствами фірми. Поклавши у (5.17) $k=4$, маємо рекурентне рівняння:

$$F_4(x) = \max_{0<x_4<x}\left[f_4(x_4) + F_3(x - x_4)\right].$$

Оскільки даний етап є завершальним і розраховувати значення $F_4(0)$, $F_4(50)$, $F_4(100)$ та $F_4(150)$ немає змісту, тому доцільно перейти відразу до визначення $F_4(200)$.

Отже, маємо:

$$F_4(200) = \max\left\{\begin{array}{l} f_4(0) + F_3(200) = 0 + 230 = 230 \\ \underline{f_4(50) + F_3(150) = 70 + 170 = 240} \\ f_4(100) + F_3(100) = 105 + 115 = 220 \\ f_4(150) + F_3(50) = 155 + 60 = 215 \\ f_4(200) + F_3(0) = 230 + 0 = 230 \end{array}\right\} = 240.$$

Максимальний ефект розміром 240 млн. грн. забезпечує другий член $f_4(50)+F_3(150)$. Аналіз одержаних розрахунків показує, що оптимальним варіантом буде виділення четвертому підприємству інвестицій розміром 50 млн. грн., а першим трьом разом – 150 млн. грн. Щоб дізнатись, який оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими трьома підприємствами, повернемось до $F_3(150)$. Бачимо, що 150 млн. грн. оптимально можна розділити за двома варіантами:

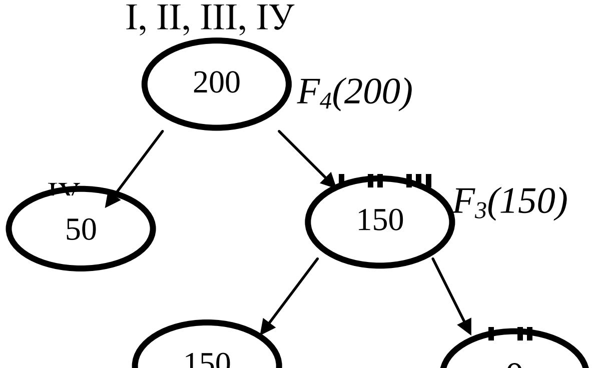
- $f_3(0)+F_2(150)$, тобто третьому підприємству кошти не виділяти, а віддати першим двом 150 млн. грн. Щоб визначити оптимальний варіант розподілу 150 млн. грн. між першими двома підприємствами, повернемось до $F_2(150)$. Бачимо, що цей варіант розподілу отримуємо з виразу $f_2(50)+F_1(100)$, тобто другому підприємству даємо 50 млн. грн., а першому – 100 млн. грн.
- $f_3(150)+F_2(0)$, який означає, що в третє підприємство вигідно інвестувати 150 млн. грн., а першим двом кошти не виділяти.

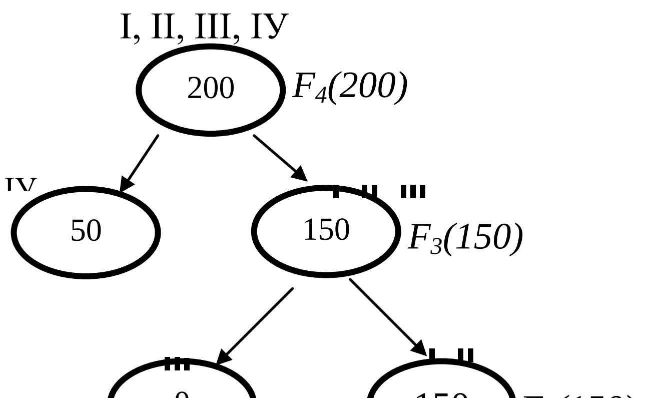
Отже, ми отримали два оптимальні плани розподілу 200 млн. грн. між чотирма підприємствами фірми:

І варінт розподілу		**ІІ варінт розподілу**	
Підприємство	*Розмір інвестицій*	*Підприємство*	*Розмір інвестицій*
Перше	***100*** млн.грн.	Перше	***0*** млн.грн.
Друге	***50*** млн.грн.	Друге	***0*** млн.грн.
Третє	***0*** млн.грн.	Третє	***150*** млн.грн.
Четверте	***50*** млн.грн.	Четверте	***50*** млн.грн.

При розподілі коштів за кожним з двох варіантів отримаємо максимальний приріст продукції розміром 240 млн. грн.

Схематично це можна представити таким чином:





Лекція 6. Моделювання конкурсів інвестиційних проектів

Припустимо, що n проектів конкурують між собою за право отримати інвестиційний фонд компанії.

Введемо наступні позначення: i – індекс інвестиційного проекту ($i = \overline{1,n}$); t – індекс планового періоду ($t = \overline{1,T}$) інвестиційної діяльності. Нам відомі вектори вкладень і ефективності i – го інвестиційного проекту на одиницю вкладень коштів для періоду t , які відповідно становлять

$$d_{ti} = \begin{cases} 1, & \text{якщо в } i-\text{й проект здійснено вкладення у періоді } t \\ 0, & \text{якщо в } i-\text{й проект вкладення відсутні у періоді } t \end{cases}$$

та

$$q_{ti} = \begin{cases} q^*_{ti}, & \text{якщо від } i\text{-го проекту надходять кошти розміром } q^*_{ti} \text{ у періоді } t \\ 0, & \text{якщо від } i\text{-го проекту відсутнє надходження коштів у періоді } t \end{cases}$$

Крім цього, компанія має можливість надавати кредити під P_t % річних в обсязі можливого залишку грошових коштів y_t (y_t - змінна, що означає обсяг можливого виділення короткотермінового кредиту в періоді *t*), які не були вкладені в інвестиційні проекти в *t*-му періоді. Прибуток, отриманий у результаті інвестиційної діяльності, можна реінвестувати у відповідності до існуючої схеми, основу якої складають значення q_{ti}. Позначимо через α_{ti} та β_{ti} - відповідно нижню та верхню межу можливих обсягів вкладень в *i –й* проект у періоді *t.* Компанія має можливість виділити для інвестиційної діяльності власні кошти обсягом *Q* грошових одиниць. Основною невідомою величиною є: x_{ti} - обсяг грошових коштів, які виділяються для *i* - го інвестиційного проекту в періоді *t.* Мета компанії – отримати максимальну суму грошових коштів в кінцевому періоді інвестиційної діяльності. Враховуючи введені позначення, математична модель задачі набуде вигляду.

Знайти такий невід'ємний розв'язок $\{x_{ti} \geq 0,\ y_t \geq 0,\ t = \overline{1,T};\ i = \overline{1,n}\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^{n} q_{ti} \cdot x_{\tau_i i} + \frac{100 + P_{t-1}}{100} \cdot y_{t-1} \to max, t = T, \tau_i \in M_\tau \ , \qquad (3.52)$$

де індекс τ_i означає період, в якому вклали кошти в *i* -й інвестиційний проект; M_τ - множина періодів, в яких були здійснені вкладення в *i* -й інвестиційний проект, а повернення коштів відбувається в періоді *t*($M_\tau \subset \{t = \overline{1,T-1};\ \tau < t\}$,

при виконанні наступних умов:

1) за граничним обсягом вкладень у відповідні проекти

$$\alpha_{ti} \le x_{ti} \le \beta_{ti}, i \subset I, t = \overline{1, T-1}, \tag{3.53}$$

де І-множина тих інвестиційних проектів, для яких існує нижня або верхня межа вкладень, або обидві;

2) уся наявна сума фінансових ресурсів повинна бути використаною у першому періоді, тобто вкладена у відповідні проекти та надана під можливий кредит

$$\sum_{i=1}^{n} d_{ti} \cdot x_{ti} + y_t = Q, t = 1; \tag{3.54}$$

3) балансові умови руху фінансових ресурсів у наступних періодах

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ti} \cdot x_{\tau_j i} + \frac{100 + P_{t-1}}{100} \cdot y_{t-1} = \sum_{i=1}^{n} d_{ti} \cdot x_{ti} + y_t, t = \overline{2, T-1}; \tau_i \in M_\tau \ . \tag{3.55}$$

<u>Приклад 3.8.</u> Шість проектів беруть участь у конкурсі за отримання інвестиційних фондів компанії. Нам відома ефективність кожного інвестиційного проекту на одну гривну вкладених коштів у динаміці (табл. 3.20).

Таблиця 3.20.

Рік	Ефективність інвестиційних проектів на 1 грн. вкладених коштів					
	A	B	C	D	E	F
1	-1,0	-1,0	0	0	0	0
2	0,4	0,9	0	-1,0	0	0
3	0	1,0	-1,0	0,2	-1,0	0
4	1,1	0	0	0,9	0,8	-1,0
5	0	0	1,7	0,4	0,6	1,2

Від'ємні величини означають здійснення вкладень коштів у відповідні проекти та періоди, а додатні – схему їх повернення. Так, проект В – це інвестиції, які можна вкласти на початку першого року на два наступних. Причому, в кінці того ж року можна повернути 0,6 обсягу вкладених коштів, а на кінець другого року – всю суму вкладень. Сума вкладень у проект В не повинна перевищувати 300 тис. грн., а у проект F – не менше 100 тис. грн.

Кошти, отримані у результаті інвестиційної діяльності, можна реінвестувати у відповідності до існуючої схеми (3.20). Крім цього, компанія має можливість отримувати 20% річних за надання короткострокових кредитів з коштів, які не були вкладеними в інвестиційні проекти у даному році. Компанія має 2 млн.грн. власних грошей. Її мета полягає в отриманні максимальної суми грошових коштів, заощаджених в кінцевому періоді.

Розв'язання.

Невідомими величинами даної задачі будуть: $x_{11}, x_{12}, x_{33,} x_{24}, x_{35}, x_{46}$, які означають обсяги вкладених коштів у проекти A, B, C, D, E та F відповідно; y_1, y_2, y_3, y_4 показують величину можливих короткострокових кредитів, виділених у першому, другому, третьому та четвертому періодах відповідно.

Побудову числової економіко-математичної моделі почнемо з формування умов системи обмежень і завершимо побудовою цільової функції.

Для знаходження оптимального розв'язку задачі моделювання конкурсів інвестиційних проектів необхідне виконання наступних умов:

1) за максимальним розміром вкладень у проект В $x_{12} \le 300$;
2) за мінімальним розміром вкладень у проект F $x_{46} \ge 100$;
3) уся наявна сума фінансових ресурсів повинна бути повністю використаною за перший рік $x_{11} + x_{12} + y_1 = 2000$;
4) балансова умова руху фінансових ресурсів у другому році $0{,}4x_{11} + 0{,}9x_{12} + 1{,}2y_1 = x_{24} + y_2$, або $0{,}4x_{11} + 0{,}9x_{12} + 1{,}2y_1 - x_{24} - y_2 = 0$

5) балансова умова руху фінансових ресурсів у третьому році $x_{12}+0{,}2x_{24}+1{,}2y_2=x_{33}+x_{35}+y_3$, або $x_{12}+0{,}2x_{24}+1{,}2y_2-x_{33}-x_{35}-y_3=0$

балансова умова руху фінансових ресурсів у четвертому році

$$1{,}1x_{11}+0{,}9x_{24}+0{,}8x_{36}+1{,}2y_3=x_{46}+y_4, \text{ або}$$

$$1{,}1x_{11}+0{,}9x_{24}+0{,}8x_{36}+1{,}2y_3-x_{46}-y_4=0.$$

В основу побудови цільової функції покладено рух фінансових ресурсів у кінцевому періоді. Тобто, компанія має отримати максимальну суму коштів розміром: $Z=1{,}7x_{33}+0{,}4x_{24}+0{,}6x_{35}+1{,}2x_{46}+1{,}2y_4\to max$.

Результати розв’язку задачі сформуємо у вигляді таблиці динаміки руху фінансових потоків процесу інвестування (табл.3.21)

Таблиця 3.21

Рік	Динаміка вкладення коштів у проекти, тис.грн.						Розмір кредитів, тис.грн..
	A	B	C	D	E	F	
1	0	300					1700
2				0			2310
3			2947		125		
4						100	

Оптимальний сценарій організації інвестиційного процесу забезпечить компанії в кінцевому періоді максимальний прибуток розміром 5204.9 тис.грн. Розрахована динамічна схема фінансових потоків вказує на високу ефективність інвестиційного процесу, приріст якого складає $\frac{5204.9-2000}{2000}\cdot 100\%=160.245\%$. Даний приріст можна отримати за рахунок власних коштів, виділених кредитів у перший та другий рік та реінвестування прибутку у відповідні проекти (C, E та F).

Лекція 7. Модель оптимізації інвестиційної діяльності акціонерного товариства

Акціонерне товариство (АТ) на перспективу планує придбати нове обладнання для виробництва продукції, вартість якого становить Q млн. грн. У відповідності з укладеним договором дану суму необхідно сплатити протягом T місяців. Позначимо через t –індекс відповідного планового періоду (місяць), $t=\overline{1,T}$. Відрахування за придбане обладнання у періоді t складає згідно договору q_t млн. грн.

Для повного розрахунку та дотримання договірних умов АТ планує створити цільовий фонд, призначений для інвестиційної діяльності. Оскільки інвестиційна діяльність дасть додатковий прибуток до моменту розрахунку за придбане обладнання, відкладати слід не всю суму вартості Q, а значно меншу. Яку саме, залежить від наявних фінансових можливостей та оптимальної організації інвестиційного процесу. АТ прогнозує зосередити свою інвестиційну діяльність на n проектах використання фінансових ресурсів цільового фонду. Позначимо через i – індекс інвестиційного проекту ($i=\overline{1,n}$). Нам відомі кількісні характеристики відповідних інвестиційних проектів: h_i - тривалість i – го інвестиційного проекту (місяць); p_i - відсоток за кредит для i – го проекту; R_i – індекс ризику i – го проекту. Крім цього, керівництво АТ ставить перед собою три основних мети:

1) при даних можливостях інвестування та затвердженого графіку виплат необхідно розрахувати прогнозну стратегію, що буде мінімізувати необхідну початкову суму грошових коштів, які АТ направлятиме на оплату за обладнання відповідно до умов договору;

2) при розробці оптимальної фінансової стратегії середній індекс ризику інвестиційних фондів протягом кожного місяця не повинен перевищувати R;

3) на початок кожного місяця (після того, як зроблені нові інвестиції) середня тривалість погашення інвестиційних фондів не повинна перевищувати *h* місяців.

Для побудови формалізованої моделі даної задачі введемо такі додаткові позначення:

(α_{it})- вектор, який відображає процес вкладення коштів в *i* – тий проект у періоді *t*, або його відсутність,

$$\alpha_{it} = \begin{cases} 1, \text{ якщо здійснено вкладення в } i-\text{тий проект у періоді } t \\ 0, \text{ якщо вкладення відсутні в } i-\text{тий проект у періоді } t \end{cases},$$

(a_{it})- вектор, який з допомогою величин R_i відображає числове значення індексів ризику *i*-го проекту, наявних у періоді *t*,

$$a_{it} = \begin{cases} R_i, & \text{якщо проект } i \text{ діє у періоді } t \\ 0, & \text{якщо проект } i \text{ відсутній у періоді } t \end{cases};$$

(b_{it}) – вектор, який з допомогою величин h_i моделює реальну тривалість *i* – го інвестиційного проекту у періоді *t* з врахуванням його початку реалізації,

$$b_{it} = \begin{cases} h_i(t), & \text{якщо проект } i \text{ діє у періоді } t \\ 0, & \text{якщо проект } i \text{ відсутній у періоді } t \end{cases},$$

де $h_i(t)$ - фактична тривалість *i*-го проекту для періоду *t;*

(α^*_{it}) - вектор, який показує величину повернення грошових коштів від *i* – го проекту у періоді *t* з урахуванням процентної ставки за кредит,

$$\alpha^*_{it} = \begin{cases} \dfrac{100 + P_i\%}{100\%}, \text{ якщо повернення від } i\text{-го проекту відбувається у періоді } t \\ 0, \text{ якщо повернення від } i\text{-го проекту відсутнє у періоді } t \end{cases}$$

(β_{it}) – вектор, який показує наявність або відсутність *i* – го інвестиційного проекту у періоді *t*,

$$\beta_{it} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i-\text{тий проект діє у періоді } t \\ 0, & \text{якщо } i-\text{тий проект відсутній у періоді } t \end{cases}.$$

Невідомими змінними даної задачі будуть:

x – початкова сума наявних фінансових ресурсів;

x_{it} - обсяг фінансових ресурсів, направлених в i – й інвестиційний проект на початок періоду t.

Враховуючи введені позначення, математична модель задачі оптимізації інвестиційної діяльності АТ набуде вигляду.

Знайти мінімальну початкову суму необхідних фінансових ресурсів, яка забезпечить виконання договірних зобов'язань, тобто

$$X \to min$$

при виконанні наступних умов:

1) балансове обмеження відносно структури інвестицій для початкового періоду:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{it} \cdot x_{it} = x, t = 1; \qquad (3.47)$$

2) балансові обмеження відносно структури інвестицій для наступних періодів:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{it}^{*} \cdot x_{i\tau_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{it} x_{it} + q_t, t = \overline{2,T}, \tau_i \in M_\tau, \qquad (3.48)$$

де τ - період, у якому відбулося вкладення в i –й проект; M_τ - множина попередніх періодів τ_i, в яких були здійснені вкладення в i –й інвестиційний проект, а повернення коштів відбувається в період t, $M_\tau \subset \{t = \overline{1,T}; \tau_i < t\}$;

3) обмеження на середній ризик проектів для кожного періоду:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_{it} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{it} x_{it}} \le R, t = \overline{1,T} \quad ; \qquad (3.49)$$

4) обмеження на середній термін погашення інвестиційного фонду для кожного періоду:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_{it} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{it} x_{it}} \le h, t = \overline{1,T}; \qquad (3.50)$$

5) по невід'ємності змінних:

$$x \geq 0, x_{it} \geq 0, i = \overline{1, n}, t = \overline{1, T}. \qquad (3.51)$$

Приклад 3.7. Акціонерне товариство закритого типу заключило договір на придбання нового обладнання для виробництва продукції загальною вартістю 900 млн. грн.

У відповідності до укладеного договору 300 млн. грн. в якості авансу необхідно виплатити через три місяці, а решту суми – через вісім місяців, коли встановлять обладнання. Для повного розрахунку та в заданий термін АТ планує створити цільовий фонд, призначений для інвестиційної діяльності. Оскільки інвестиційна діяльність дасть можливість отримати додатковий прибуток до моменту розрахунку за придбане обладнання, відкласти слід не всю суму (900 млн. грн.), а значно меншу. Яку саме, залежить від наявних фінансових можливостей та вмілої організації процесу інвестування. АТ вирішило спрямувати свою інвестиційну діяльність у п'ятьох напрямах (17 можливих варіантів) використання фінансових ресурсів цільового фонду. Схема можливих варіантів інвестиційного процесу приведена у таблиці 3.17.

Таблиця 3.17.

Напрям використання інвестицій	Початок реалізації інвестиційних проектів	Тривалість інвестиційних проектів	Відсоток за кредит	Індекс ризику

A	1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8	1	20	4
B	1, 3 , 5, 7	2	15	6
C	3, 6	3	12	8
D	1, 5	4	10	5
E	1	8	25	3

Основними завданнями при вирішенні даної проблеми є:

а) при даних можливостях інвестування та затвердженого графіку виплат коштів за придбане обладнання необхідно розрахувати прогнозну стратегію діяльності АТ, яка б мінімізувала початкову суму наявних грошових коштів;

б)при розробці оптимальної стратегії середній індекс ризику інвестиційного фонду протягом кожного місяця не повинен перевищувати 8;

в)на початок кожного місяця середня тривалість погашення інвестиційного фонду не повинна перевищувати 3 місяці.

Розв'язання. Відобразимо динаміку можливих вкладень у вигляді такої схеми (табл. 3.16).

Позначимо: x_{11} , x_{22}, x_{33}, …, x_{88} – обсяг інвестицій проекту *A* на початок першого, другого, і т.д., восьмого місяця відповідно; x_{91} , $x_{10,3}$, $x_{11,5}$, $x_{12,7}$ – обсяг інвестицій проекту *B* на початок першого, третього, п'ятого та сьомого місяця відповідно; $x_{13,3}$, $x_{14,6}$ – обсяг інвестицій проекту *C* на початок третього та шостого місяця відповідно; $x_{15,1}$ та $x_{16,5}$ – обсяг інвестицій проекту *D* на початок першого та п'ятого місяця відповідно; $x_{17,1}$ – обсяг інвестицій проекту *E* на початок першого місяця ; x – обсяг початкових грошових коштів, млн. грн.

Побудуємо числову економіко-математичну модель.

Необхідно знайти *min x*

при виконанні наступних умов:

1) балансові умови відносно структури інвестиційного фонду на початок кожного місяця:

першого $x = x_{11} + x_{91} + x_{15,1} + x_{17,1}$ або $x - x_{11} - x_{91} - x_{15,1} - x_{17,1} = 0$;

другого $1{,}2x_{11} = x_{22}$ або $1{,}2x_{11} - x_{22} = 0$;

третього $1{,}2x_{22} + 1{,}15x_{91} = x_{33} + x_{10,3} + x_{13,3} + 300$ або

$$1{,}2x_{22} + 1{,}15x_{91} - x_{33} - x_{10,3} - x_{13,3} = 300;$$

Таблиця 3.16.

Варіанти ІП		Можливі вкладення і повернення грошових коштів на початок кожного місяця								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	1 x_{11}	1	1,2							
	2 x_{22}		1	1,2						
	3 x_{33}			1	1,2					
	4 x_{44}				1	1,2				
	5 x_{55}					1	1,2			
	6 x_{66}						1	1,2		
	7 x_{77}							1	1,2	
	8 x_{88}								1	1,2
B	1 x_{91}	1		1,15						
	3 $x_{10,3}$			1		1,15				
	5 $x_{11,5}$					1		1,15		
	7 $x_{12,7}$							1		1,15
C	3 $x_{13,3}$			1			1,12			

	6 $x_{14,6}$						1			1,12
D	1 $x_{15,1}$	1				1,1				
	5 $x_{16,5}$					1				1,1
E	1 $x_{17,1}$	1								1,25

четвертого $1{,}2x_{33} = x_{44}$ або $1{,}2x_{33} - x_{44} = 0$;

п'ятого $1{,}2x_{44} + 1{,}15x_{10,3} + 1{,}1x_{15,1} = x_{55} + x_{11,5} + x_{16,5}$ або

$$1{,}2x_{44} + 1{,}15x_{10,3} + 1{,}1x_{15,1} - x_{55} - x_{11,5} - x_{16,5} = 0;$$

шостого $1{,}2x_{55} + 1{,}12x_{13,3} = x_{66} + x_{14,6}$ або

$1{,}2x_{55} + 1{,}12x_{13,3} - x_{66} - x_{14,6} = 0$;

сьомого $1{,}2x_{66} + 1{,}15x_{11,5} = x_{77} + x_{12,7}$ або

$1{,}2x_{66} + 1{,}15x_{11,5} - x_{77} - x_{12,7} = 0$;

восьмого $1{,}2x_{77} = x_{88}$ або $1{,}2x_{77} - x_{88} = 0$;

дев'ятого $1{,}2x_{88} + 1{,}15x_{12,7} + 1{,}12x_{14,6} + 1{,}1x_{16,5} + 1{,}25x_{17,1} = 600$;

2) обмеження на середню величину ризику проектів для кожного місяця:

першого $\dfrac{4x_{11} + 6x_{91} + 5x_{15,1} + 3x_{17,1}}{x_{11} + x_{91} + x_{15,1} + x_{17,1}} \le 5$ або $-x_{11} + x_{91} - 2x_{17,1} \le 0$;

другого $\dfrac{4x_{22} + 6x_{91} + 5x_{15,1} + 3x_{17,1}}{x_{22} + x_{91} + x_{15,1} + x_{17,1}} \le 5$ або $-x_{22} + x_{91} - 2x_{17,1} \le 0$;

третього $\dfrac{4x_{33} + 6x_{10,3} + 8x_{13,3} + 5x_{15,1} + 3x_{17,1}}{x_{33} + x_{10,3} + x_{13,3} + x_{15,1} + x_{17,1}} \le 5$ або

$$-x_{33} + x_{10,3} + 3x_{13,3} - 2x_{17,1} \le 0;$$

четвертого $\dfrac{4x_{44} + 6x_{10,3} + 8x_{13,3} + 5x_{15,1} + 3x_{17,1}}{x_{44} + x_{10,3} + x_{13,3} + x_{15,1} + x_{17,1}} \le 5$ або

$$-x_{44}+x_{10,3}+3x_{13,3}-2x_{17,1}\le 0;$$

п'ятого $\dfrac{4x_{55}+6x_{10,3}+8x_{13,3}+5x_{15,1}+3x_{17,1}}{x_{55}+x_{10,3}+x_{13,3}+x_{15,1}+x_{17,1}}\le 5$ або

$$-x_{55}+x_{10,3}+3x_{13,3}-2x_{17,1}\le 0;$$

шостого $\dfrac{4x_{66}+6x_{11,5}+8x_{14,6}+5x_{16,5}+3x_{17,1}}{x_{66}+x_{11,5}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}}\le 5$ або

$$-x_{66}+x_{11,5}+3x_{14,6}-2x_{17,1}\le 0;$$

сьомого $\dfrac{4x_{77}+6x_{12,7}+8x_{14,6}+5x_{16,5}+3x_{17,1}}{x_{77}+x_{12,7}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}}\le 5$ або

$$-x_{77}+x_{12,7}+3x_{14,6}-2x_{17,1}\le 0;$$

восьмого $\dfrac{4x_{88}+6x_{12,7}+8x_{14,6}+5x_{16,5}+3x_{17,1}}{x_{88}+x_{12,7}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}}\le 5$ або

$$-x_{88}+x_{12,7}+3x_{14,6}-2x_{17,1}\le 0;$$

3) обмеження на середній термін погашення інвестиційного фонду на кожен місяць:

першого $\dfrac{x_{11}+2x_{91}+4x_{15,1}+8x_{17,1}}{x_{11}+x_{91}+x_{15,1}+x_{17,1}}\le 3$ або $-2x_{11}-x_{91}+x_{15,1}+5x_{17,1}\le 0$;

другого $\dfrac{x_{22}+x_{91}+3x_{15,1}+7x_{17,1}}{x_{22}+x_{91}+x_{15,1}+x_{17,1}}\le 3$ або $-2x_{22}-2x_{91}+4x_{17,1}\le 0$;

третього $\dfrac{x_{33}+2x_{10,3}+3x_{13,3}+2x_{15,1}+6x_{17,1}}{x_{33}+x_{10,3}+x_{13,3}+x_{15,1}+x_{17,1}}\le 3$ або

$-2x_{33}-x_{10,3}-x_{151}+3x_{17,1}\le 0$;

четвертого $\frac{x_{44}+x_{10,3}+2x_{13,3}+x_{15,1}+5x_{17,1}}{x_{44}+x_{10,3}+x_{13,3}+x_{15,1}+x_{17,1}} \le 3$ або

$$-2x_{44}-2x_{10,3}-x_{13,3}-2x_{15,1}+2x_{17,1} \le 0;$$

п'ятого $\frac{x_{55}+2x_{11,5}+x_{13,3}+4x_{16,5}+4x_{17,1}}{x_{55}+x_{11,5}+x_{13,3}+x_{16,5}+x_{17,1}} \le 3$ або

$$-2x_{55}-x_{11,5}-2x_{13,3}+x_{16,5}+x_{17,1} \le 0;$$

шостого $\frac{x_{66}+x_{11,5}+3x_{14,6}+3x_{16,5}+3x_{17,1}}{x_{66}+x_{11,5}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}} \le 3$ або

$$-2x_{66}-2x_{11,5} \le 0;$$

сьомого $\frac{x_{77}+2x_{12,7}+2x_{14,6}+2x_{16,5}+2x_{17,1}}{x_{77}+x_{12,7}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}} \le 3$ або

$$-2x_{77}-x_{12,7}-x_{14,6}-x_{16,5}-x_{17,1} \le 0;$$

восьмого $\frac{x_{88}+x_{12,7}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}}{x_{88}+x_{12,7}+x_{14,6}+x_{16,5}+x_{17,1}} \le 3$ або $1 \le 3$.

Представимо знайдений оптимальний розв'язок даної задачі у табличній формі (табл..3.19).

Таблиця 3.19.

Варіанти інвестицій-них проектів		Динаміка руху грошових потоків, млн.грн. (– вкладення, + повернення)							
		1	2	3	4	5	6	7	8
	x_{11}	-347.87	417.45						

	***x*₂₂**		-417.45	500.94					
A	***x*₃₃**			-200.94	241.13				
	***x*₄₄**				-241.13	289.35			
	***x*₅₅**					-289.35	347.22		
	***x*₆₆**						-347.22	416.67	
	***x*₇₇**							-416.67	500.0
	***x*₈₈**								500.0

Відповідно до оптимального розв’язку початкова сума грошових коштів повинна становити 347.87 млн.грн. Зрозуміло, що даної суми коштів не вистачає для разової оплати за придбання нового обладнання. Проте, вміла організація інвестиційного процесу дає можливість здійснити розрахунок відповідно до контракту завдяки інвестиційного проекту А. Використання інших проектів за даних фінансових умов не є ефективним.

Відповідно до схеми грошових потоків інвестиційна діяльність тільки за перших два місяці дає можливість здійснити повернення першої часткової суми та отримати 57,78% приросту коштів (200.94 млн.грн.) від початкової суми. Отриманий приріст доходу реінвестується в інші проекти з метою повного погашення залишкового боргу в кінцевому періоді інвестиційної діяльності.

Лекція 8. Модель оптимізації процесу фінансування з врахуванням часового фактору

На відміну від евристичного розподілу фінансових ресурсів, коли для кожного об'єкта та кожного періоду часу задається строго визначена величина, при оптимальному фінансуванні для кожного об'єкту і кожного періоду задаються не конкретні значення, а нижня та верхня граничні умови, тобто інтервали, в яких повинні знаходитися шукані невідомі величини. У цих інтервалах здійснюється фінансування з метою максимізації його ефективного використання, яке визначається з допомогою цільової функції.

Припустимо, що виробнича система складається з n об'єктів, функціонування яких проходить в T часових періодах. Введемо наступні позначення: i- індекс об'єкту фінансування, $i=\overline{1,n}$; t- індекс періоду фінансування, $t=\overline{1,T}$; a_i- величина фінансових ресурсів виділених i-му об'єкту; b_t - величина фінансових ресурсів потрібних в t-му періоді; A – загальний обсяг виділених фінансових ресурсів; C_{it}- величина кількісної оцінки ефективності розподілу фінансових ресурсів i-му об'єкту в періоді t; x_{it} - невідома величина, яка визначає оптимальний обсяг фінансування i-го об'єкта в періоді t; α_{it}, β_{it} - відповідно, нижня та верхня границі фінансування i–го об'єкта в періоді t.

Розглянемо можливі варіанти кількісної оцінки величини ефективності розподілу ресурсів.

З допомогою величини C_{it} можна встановити пріоритет фінансування i–го об'єкта в періоді t. В такому випадку чим важливіше фінансування, тим більше значення C_{it}. Наприклад, його можна оцінювати в бальній системі в інтервалі від 0 до 10. В даному випадку знаходиться максимум цільової функції.

Якщо C_{it} є мірою кількісної оцінки результату фінансування, то цільова функція теж максимізується. Наприклад, C_{it} означає величину отриманого прибутку i–м об'єктом від одиниці вкладених коштів в періоді t.

Якщо C_{it} характеризує витрати, то цільова функція мінімізується.

Враховуючи введені позначення, математична модель оптимального фінансування може бути сформульована наступним чином.

Знайти такий невід'ємний розв'язок $\{x_{it} \geq 0,\ i=\overline{1,n};\ t=\overline{1,T}\}$, який забезпечить

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} C_{it}x_{it} \to \max(\min), \tag{3.14}$$

при виконанні наступних умов:

1) за розміром виділених лімітів відповідним об'єктам

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq a_i, \quad i=\overline{1,n}; \tag{3.15}$$

2) за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} \leq b_t, \quad t=\overline{1,T}; \tag{3.16}$$

3) за загальним обсягом фінансування виробничої системи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T} x_{it} \leq A; \tag{3.17}$$

4) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів

$$\alpha_{it} \leq x_{ij} \leq \beta_{it}, \quad i \in M_i,\ t \in M_t; \tag{3.18}$$

де M_i - множина тих об'єктів, а M_t - множина тих періодів, для яких встановлюються відповідні граничні рівні.

У даній моделі повинна виконуватися додаткова умова, яка полягає в тому, що потреби у фінансових ресурсах не повинні перевищувати загального обсягу виділених бюджетних коштів:

$$\sum_{t=1}^{T} b_t \le A \,. \tag{3.19}$$

Проте у практичній діяльності зустрічаються випадки, коли потреби перевищують наявні фінансові кошти, тобто нерівність (3.19) не виконується, а отже має місце дефіцит фінансових ресурсів. Нехай для нашої виробничої системи дефіцит фінансових ресурсів складає

$$d = \sum_{t=1}^{T} b_t - \sum_{i=1}^{n} a_i \quad . \tag{3.20}$$

Тоді виникає необхідність в залученні додаткових фінансових ресурсів шляхом створення інвестиційних фондів або взяття кредитів. Припустимо, що для забезпечення фінансування в повному обсязі планується взяти m кредитів у відповідних банках обсягом не більше Q_j під P_j% (j - індекс банку, $j = \overline{1, m}$).

Введемо додаткову невідому величину y_{ij}, яка означатиме обсяг взятих кредитів в j-му банку для i–го об’єкта. Приймемо в якості критерію оптимальності величину отриманого чистого прибутку виробничою системою. Тоді економіко-математична модель матиме наступний вид.

Знайти оптимальний розв’язок $\{x_{ij} \ge 0,\ y_{it} \ge 0; i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m}; t = \overline{1, T}\ \}$ задачі повного забезпечення фінансовими ресурсами та їх розподілу, який забезпечить максимум чистого прибутку:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} C_{it} x_{it} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{100 + P_j}{100} y_{ij} \ (max) \quad ; \tag{3.21}$$

при виконанні наступних умов:

1) за повним забезпеченням елементів виробничої системи фінансовими ресурсами

$$\sum_{t=1}^{T} x_{it} = a_i + \sum_{j=1}^{m} y_{ij}, \quad i = \overline{1, n}\ ; \tag{3.22}$$

2) за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах

$$\sum_{i=1}^{n} x_{it} = b_t, \quad t = \overline{1, T}\ ; \tag{3.23}$$

3) за граничними розмірами можливих обсягів виділених банками кредитів

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \le Q_j, \quad j = \overline{1, m}\ ; \tag{3.24}$$

4) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів

$$\alpha_{it} \le x_{it} \le \beta_{it}, \quad i \in M_i,\ t \in M_t; \tag{3.25}$$

5) за розміром покриття дефіциту фінансових ресурсів

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} = d\ . \tag{3.26}$$

Приклад 3.4. Виробниче об'єднання складається із п'яти суміжних підприємств. Протягом півріччя для організації виробничих процесів місячна потреба об'єднання у фінансових ресурсах становить відповідно 20, 30, 50, 60, 70 та 80 млн. грн. Величина виділених лімітів для відповідних підприємств становить 30,60, 40, 50 та 70 млн. грн. Наявний дефіцит фінансових ресурсів можна покрити за рахунок взяття кредитів в трьох банках під відповідні проценти: 40%, 50% та 60%. Розміри фактичних кредитів не повинні перевищувати 20, 30 та 40 млн. грн. відповідно. Величини отриманого прибутку i -м підприємством від одиниці вкладених коштів в періоді t у виробничий процес задаються з допомогою матриці (C_{it}) ($i = \overline{1,5},\ t = \overline{1,6}$):

$$(C_{ij}) = \begin{Bmatrix} 0{,}21 & 0{,}32 & 0{,}41 & 0{,}36 & 0{,}26 & 0{,}45 \\ 0{,}34 & 0{,}64 & 0{,}48 & 0{,}38 & 0{,}21 & 0{,}62 \\ 020 & 0{,}48 & 0{,}72 & 0{,}92 & 0{,}41 & 0{,}38 \\ 0{,}38 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}68 & 0{,}94 & 0{,}41 \\ 0{,}45 & 0{,}18 & 0{,}32 & 0{,}26 & 0{,}41 & 0{,}39 \end{Bmatrix}$$

Нижні та верхні обсяги можливого фінансування підприємств протягом півріччя задаються з допомогою матриць (α_{it}) та (β_{it}), відповідно:

$$\alpha_{it} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{it} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Визначити оптимальний варіант фінансування підприємств об’єднання, який забезпечить максимум прибутку ВО.

Розв’язання. Для побудови числової математичної моделі позначимо через X_{it} $(i = \overline{1{,}5},\ t = \overline{1{,}6})$ обсяг фінансування i-го підприємства в періоді t.

Оскільки, величина дефіциту фінансових ресурсів $d = \sum_{t=1}^{6} b_t - \sum_{i=1}^{5} a_i = 310 - 250 = 60$ млн. грн., нам необхідно взяти кредити $(y_{ij},\ i = \overline{1{,}6};\ j = \overline{1{,}3})$ в трьох банках.

Математична модель задачі буде мати вигляд:

Знайти

$$Z = 0{,}21x_{11} + 0{,}32x_{12} + 0{,}41x_{13} + 0{,}36x_{14} + 0{,}26x_{15} + 0{,}45x_{16} + \ldots +$$
$$+ 0{,}45x_{51} + 0{,}18x_{52} + 0{,}32x_{53} + 0{,}26x_{54} + 0{,}41x_{55} + 0{,}39x_{56} -$$
$$-1{,}4y_{11} - 1{,}5y_{12} - 1{,}6y_{13} - \ldots - 1{,}4y_{51} - 1{,}5y_{52} - 1{,}6y_{53} \to \max$$

при виконанні наступних умов:

1) за розмірами виділених лімітів відповідним об'єктам:

- першому

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} \le 30 + y_{11} + y_{12} + y_{13}$, або

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} - y_{11} - y_{12} - y_{13} \le 30$

- другому

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \le 60 + y_{21} + y_{22} + y_{23}$, або

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} - y_{21} - y_{22} - y_{23} \le 60$

- третьому

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \le 40 + y_{31} + y_{32} + y_{33}$, або

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} - y_{31} - y_{32} - y_{33} \le 40$

- четвертому

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} \le 50 + y_{41} + y_{42} + y_{43}$, або

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} - y_{41} - y_{42} - y_{43} \le 50$

- п'ятому

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} \le 70 + y_{51} + y_{52} + y_{53}$, або

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} - y_{51} - y_{52} - y_{53} \le 70$

2) за розміром потреби фінансових ресурсів у відповідних періодах:

- першому

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 20$

- другому

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 30$

- третьому

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 50$

- четвертому

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 60$

- п’ятому

$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=70$

- шостому

$x_{16}+x_{26}+x_{36}+x_{46}+x_{56}=80$

3) за граничними розмірами можливих обсягів виділених банками кредитів:

   - першим

   $y_{11}+y_{21}+y_{31}+y_{41}+y_{51}\le 20$

   - другим

   $y_{21}+y_{22}+y_{32}+y_{42}+y_{52}\le 30$

   - третім

   $y_{13}+y_{23}+y_{33}+y_{43}+y_{53}\le 40$

4) за граничними обсягами розподілу фінансових ресурсів між об’єктами

   - першому

   min $x_{11}\ge 5$

   max $x_{16}\le 10$

   - другому

   min $x_{21}\ge 10$

   max $x_{22}\le 20$

   - третьому

   min $x_{31}\ge 5$

   max $x_{34}\le 15$

   - четвертому

   min $x_{43}\ge 5$

   max $x_{45}\le 25$

   - п’ятому

   min $x_{52}\ge 10$

   max $x_{51}\le 20$.

Розв’язок даної задачі представимо у вигляді табл.3.13.

Таблиця 3.13

Об'єкт	Поступлення власних коштів у відповідні періоди, млн.грн.						Обсяг власних коштів, млн.грн.	Кредити відповідних банків, млн.грн.		
	1	2	3	4	5	6				
1	5		15			10	30			
2	10	20				55	60		15	10
3	5		30	15			40	10		
4			5	45	25		50	10		
5		10			45	15	70			
Потреби коштів	20	30	50	60	70	80		20	15	10

Отже, нами отримано оптимальну динамічну схему фінансових потоків для структурних підрозділів виробничого об'єднання. Дефіцит фінансових ресурсів буде покритий за рахунок взяття відповідних кредитів на суму 45 млн.грн. Завдяки одержаному оптимальному сценарію руху фінансових ресурсів об'єднання отримає чистий прибуток розміром 90,2 млн.грн.

Дану задачу можна розв'язати на основі багатокритеріального підходу. В якості проміжних критеріїв оптимальності можна прийняти максимум прибутку для окремих структурних підрозділів об'єднання, використавши запропоновані вище методи побудови компромісних планів.