

Мета і завдання вивчення дисципліни «Теорія ігор»

Мета вивчення дисципліни.

Програма та тематичний план дисципліни орієнтовані на формування у студентів базових знань з основ застосування методів і моделей теорії ігор в процесі розв'язування теоретичних і економічних задач. Програма та тематичний план спрямовані на глибоке та ґрунтовне вивчення основ теорії ігор, а також розвиток логічного мислення студентів. Ця дисципліна відноситься до вибіркових дисциплін, які формують світогляд майбутніх економістів і є однією із основ вивчення економіко-математичного моделювання в процесі прийняття рішень зокрема в задачах маркетингу, менеджменту, фінансово-банківській операцій, інвестицій в різні проекти тощо.

Головним завданням курсу «Теорія ігор» є вміння будувати модель гри, що відповідає досліджуваній задач, досліджувати отриману модель (як аналітично, так і з допомогою комп'ютера), а також аналізувати отримані економічні результати. Оволодіння курсом повинно виробити у студентів навички практичного використання математичних методів, формул та таблиць в процесі розв'язування економічних задач.

Вивчення курсу передбачає наявність систематичних знань, цілеспрямованої роботи над вивченням математичної літератури, активної роботи на лекціях і практичних заняттях, самостійної роботи та виконання індивідуальних завдань.

Найменування та опис компетентностей, формування котрих забезпечує вивчення дисципліни Теорії ігор.

- володіння базовими знаннями з природничо-наукової та загально-економічної підготовки в обсязі, необхідному для розуміння предметної області та обраної професії
- здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях, розробляти проекти і управляти ними, здатність швидко адаптуватися до змін і професійно діяти в новій ситуації
- здатність здійснювати пошук та аналізувати інформацію з різних джерел, застосовувати з цією метою технічні засоби, економіко-математичні методи і моделі, інформаційне та програмне забезпечення
- здатність до аналізу та синтезу як інструментарію виявлення проблем та прийняття рішень для їх розв'язання
- здатність використовувати математичний інструментарій для дослідження економічних процесів, розв'язання прикладних економічних та оптимізаційних задач.
- здатність на основі опису економічних та соціальних процесів і явищ будувати теоретичні та прикладні моделі, аналізувати і змістовно інтерпретувати отримані результати.
- здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу
- здатність складати та аналізувати фінансову звітність, інтерпретувати та використовувати фінансову та пов'язану з нею інформацію (дані).

Результати вивчення дисципліни.

У результаті вивчення дисципліни «Теорія ігор» студенти повинні знати основні визначення, теореми, правила, а також усвідомлювати зв'язки між темами та розділами дисципліни.

В результаті вивчення дисципліни «Теорія ігор» студенти повинні вміти:

- класифікувати ігрові ситуації;
- формувати цілі і стратегії гравців;
- знаходити рівноважні профілі стратегій;
- аналізувати інформацію, якою володіють гравці;
- будувати модель гри, що відповідає досліджуваній задачі;
- аналізувати результати моделювання.

Завдання вивчення дисципліни.

Головним завданням дисципліни «Теорія ігор» є математичне моделювання і вивчення методів знаходження оптимальних стратегій в процесі прийняття рішень для антагоністичних або неантагоністичних інтересів гравців при наявності часткової або повної невизначеності.

В результаті вивчення дисципліни «Теорія ігор» студент повинен знати:

- задачі теорії ігор в економіці;
- основні поняття і класифікацію видів ігор;
- розв'язування матричних ігор двох гравців з нульовою сумою в чистих стратегіях;
- принципи максиміну і мінімаксу;
- методи знаходження оптимальних змішаних стратегій в матричних іграх;
- методи дослідження некооперативних та кооперативних біматричних ігор з прив'язкою до конкретних економічних задач;
- побудову оптимальних стратегій прийняття рішень в статистичних іграх при наявності часткової або повної невизначеності.

Завдання лекційних занять

Мета проведення лекцій полягає у:

- викладенні студентам основних визначень, тверджень, алгоритмів досліджень ігрових задач, звертаючи головну увагу на економічну інтерпретацію постановок задач та отриманих результатів;
- сформувати у студентів цілісну систему теоретичних знань з дисципліни «Теорія ігор».

Завдання проведення практичних занять

Мета проведення практичних занять полягає у виробленні практичних навичок в аналізі, формалізації і застосування математичного апарату в процесі розв'язування економічних задач.

Завдання проведення практичних занять полягає у формуванні у студентів умінь:

- класифікувати ігрові ситуації;
- формувати цілі і стратегії гравців;
- знаходити рівноважні профілі стратегій;
- аналізувати інформацію, якою володіють гравці;
- будувати модель гри, що відповідає досліджуваній задачі;
- розрахувати ігрові моделі (як аналітично, так і з допомогою комп'ютера);
- аналізувати результати моделювання.

Лекція 1. Вступ в теорію ігор.

1. Основні поняття теорії ігор.
 - 1.1. Задачі теорії ігор в економіці.
 - 1.2. Конфлікти і теорія ігор.
 - 1.3. Основні поняття і класифікація видів ігор.
2. Розв'язування матричних ігор двох гравців з нульовою сумою в чистих стратегіях. Принципи максимуму і мінімуму.

1.1.В багатьох задачах фінансово-економічної сфери, зокрема в задачах маркетингу, менеджменту, фінансово-банківських операцій, інвестицій в різні проекти тощо виникає необхідність **прийняття рішень**. Проблема прийняття рішень ускладнюється тим, що її доводиться вирішувати в **умовах невизначеності**.

Невизначеність може мати різний характер. Невизначеними можуть бути усвідомлені дії протилежної сторони, спрямовані на зменшення ефективності іншої сторони. Наприклад, фірми, конкуруючі на одному ринку, здійснюють дії, що приводять до реалізації своїх інтересів і здійснюють перепони конкурентам.

Невизначеність може відноситися і до ситуацій **ризик**, в яких сторона, що приймає рішення, у змозі встановити всі можливі результати своїх рішень разом із імовірностями їх появ. Умови, про які ведеться мова, впливають на прийняття рішень неусвідомлено і формуються із багатьох факторів (загального стану економічної і фінансової систем, курсів валют, рівня інфляції тощо).

Якщо ж відомі всі можливі наслідки рішень, що приймаються, але невідомі їх імовірності, тобто невідомі імовірності всеможливих станів зовнішнього середовища, що оточує досліджувану задачу, то говорять, що рішення приймається в умовах **повної невизначеності**.

При виборі рішення в умовах невизначеності завжди присутній фактор дій навмання без обгрунтованої впевненості в правильності рішення, що приймається. Тобто, вибір рішення в умовах невизначеності завжди пов'язаний із ризиком. Математичні методи обгрунтування рішень, що приймаються в економіці, дають можливість аналізу різних варіантів рішення з метою зменшення ризику, який іноді досягається за рахунок отримання додаткової інформації. В цьому випадку виникає проблема розрахунку вартості інформації, отримання якої дозволить максимізувати економічний ефект рішення, що приймається.

Математизація змістовних фінансово-економічних задач про прийняття рішень в умовах невизначеності і ризику приводить до відповідних економіко-математичних моделей і методів, теоретичний аспект яких складає **теорія ігор**.

Отже, задачами теорії ігор в економіці є задачі про вибір оптимальних рішень в умовах економічної невизначеності і ризику.

1.2. В практичній діяльності часто доводиться розглядати явища і ситуації, в яких беруть участь дві (або більше) сторони, які мають різні інтереси і можливості застосовувати для досягнення своїх цілей різноманітні дії. Подібні явища і ситуації називаються конфліктними або просто конфліктами.

Типова конфліктна ситуація характеризується трьома основними складовими:

1. зацікавленими сторонами (це споживачі, фірми, окремі країни, фінансові і економічні союзи і т.д.);
2. інтересами сторін (задоволення різних фінансових, економічних і політичних потреб, витіснення конкурентів з ринку збуту, підвищення доходів тощо);
3. їх можливими діями (вибір обсягу споживання, способи формування інвестиційного портфеля, вибір об'єму виробництва, вибір дивідентної політики і “демпінгової” політики тощо).

Люба конфліктна ситуація, взята із реального життя, як правило, доволі складна. Її вивчення ускладнюється наявністю багатьох різних обставин, частина з яких не впливає суттєво ні на розвиток конфлікту, ні на його наслідок. Тому, якщо вдасться вилучити ці другорядні чинники, то можна побудувати спрощену **формалізовану математичну модель конфлікту**, яку прийнято називати **грою** і яка відрізняється від реальної конфліктної ситуації ще й тим, що ведеться за цілком визначеними правилами.

Необхідність вивчення і аналізу конфліктів, представлених у вигляді спрощених моделей (ігор) покликала до життя спеціальний математичний апарат – **теорію ігор**. Зазвичай теорію ігор визначають як розділ математики для вивчення конфліктних ситуацій. Це означає, що можна виробити **оптимальні правила** поведінки кожної сторони, що бере участь у вирішенні конфліктної ситуації.

Крім того, в економіці, наприклад, виявився недостатнім апарат математичного аналізу, що займається знаходженням умовного або безумовного екстремуму функцій багатьох змінних. З'явилася необхідність вивчення так званих оптимальних **мінімаксних і максимінних** розв'язків.

Отже, теорію ігор можна розглядати як розділ методів оптимізації, що дозволяє розв'язувати задачі в теорії прийняття рішень, зокрема управлінських рішень в економіці.

1.3 Основні поняття і класифікація видів ігор

Гра - це спрощена формалізована модель реальної конфліктної ситуації. Формалізація означає розробку певних правил дій сторін у процесі гри: варіанти дій сторін, результат гри при даному варіанті, ступінь інформованості кожної сторони про поведінку всіх інших сторін.

Зацікавлені сторони, що грають, (зокрема, особи) називаються **гравцями**. При цьому одну сторону можна представляти як один гравець, так і цілий колектив.

Стратегією гравця називається довільна можлива для гравця дія в рамках заданих правил гри. В умовах конфлікту кожний гравець обирає свою стратегію, в результаті чого складається набір стратегій, що називається **ситуацією**.

Зацікавленість гравців в ситуації проявляється в тому, що кожному гравцю в кожній ситуації приписується число, що виражає ступінь задоволення його інтересів в цій ситуації і називається **виграшем** в ній. Хоча не кожний виграш можна оцінити кількісно, але в теорії ігор якісні виграші не розглядаються.

Ігри можна класифікувати за наступними критеріями:

1. **Кількість гравців.** Якщо в грі беруть участь дві сторони, то її називають грою двох осіб. Якщо ж число сторін більше двох, то її називають грою n осіб (або множинною). Найбільш глибоко розроблені ігри двох осіб.
2. **Кількість стратегій.** За цим критерієм ігри діляться на **скінченні** і **нескінченні**. В скінченній грі кожен із гравців має скінченне число можливих стратегій. У випадку, коли хоча б один гравець має безмежну кількість можливих стратегій, то гра називається **нескінченною**.

3. Взаємовідношення сторін.

За цим критерієм ігри розподіляються на безкоаліційні, коаліційні, кооперативні.

Безкоаліційною називається гра, в якій гравці не мають право здійснювати угоди, утворювати коаліції. В **коаліційній** грі гравці можуть утворювати коаліції. Якщо коаліції визначені попередньо, то така гра називається **кооперативною**.

4. **Характер виграшів.** За цим критерієм ігри підрозділяються на ігри з **нульовою сумою** та ігри з **ненульовою сумою**.

Гра з нульовою сумою означає, що сума виграшів всіх гравців в кожній партії дорівнює нулю. Ігри двох гравців з нульовою сумою відносяться до класу

антагоністичних ігор. При цьому виграш одного гравця дорівнює, природно, програшу другого гравця. Гра, в якій потрібно здійснювати внесок за право участі в ній, є грою з **ненульовою сумою**. Економічні задачі теорії ігор відносяться до обох типів ігор.

5. **Вид функцій виграшу.** За цим критерієм ігри підрозділяються на матричні, біматричні, неперервні, опуклі, сепарабельні і т.д.

Матрична гра – це скінченна гра двох гравців з нульовою сумою. Припустимо, що перший гравець (A) має m стратегій A_i , $i = \overline{1, m}$, другий гравець (B) – n стратегій B_j , $j = \overline{1, n}$. Тоді гра може бути названа грою порядку $m \times n$. Позначимо a_{ij} значення виграшу гравця A (відповідно – значення програшу гравця B), якщо A обрав стратегію A_i , а другий – стратегію B_j . В цьому випадку говорять, що має місце ситуація $\{A_i, B_j\}$. Значення виграшів a_{ij} (ефективностей) можна зобразити у вигляді платіжної таблиці, яка називається **матрицею гри** або **платіжною матрицею**.

Табл. 1.1

	B_1	B_2	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2j}		a_{2n}
...	...	...		...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Або у вигляді матриці

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Біматрична гра – скінченна гра двох гравців з ненульовою сумою. Виграш кожного гравця задається своєю платіжною матрицею.

Якщо функція виграшів

$$a_{ij} = f(i, j) \quad (*)$$

є неперервною, то гра називається неперервною, якщо опуклою, то гра називається опуклою, якщо (*) можна представити у вигляді суми добутків функцій одного аргументу – сепарабельною.

6. **Кількість ходів.** За цим критерієм ігри діляться на однокрокові та багатокрокові. **Однокрокові** завершуються після одного ходу кожного гравця, і відбувається розподіл виграшів. **Багатоходові** ігри бувають позиційними, стохастичними, диференціальними і т.д.

7.Інформованість сторін. За цим критерієм розрізняють ігри з повною і неповною інформацією. Гра визначається як гра з **повною інформацією**, якщо кожний гравець на кожному ході гри знає всі стратегії, використані раніше іншими гравцями в попередніх ходах. Якщо ж гравцю відомі не всі стратегії попередніх ходів інших гравців, то гра називається грою з **неповною інформацією**.

8.Ступінь неповноти інформації. За цим критерієм ігри діляться на статистичні і стратегічні. **Стратегічні ігри** проходять в умовах повної невизначеності. **Статистичні ігри** проводяться в умовах часткової невизначеності. В статистичній грі є можливість отримання інформації на основі статистичного експерименту, за результатами якого оцінюється розподіл імовірностей стратегій гравців. З теорією статистичних ігор тісно пов'язана теорія прийняття економічних рішень.

Вивчення теорії ігор можна здійснювати з різних точок зору. Ми будемо ставити за мету розв'язувати наступні задачі.

1. Розробка принципів оптимальності, тобто того, яку поведінку гравців слід вважати розумною або доцільною.
2. З'ясування реалізованості принципів оптимальності, тобто встановлення існування оптимальних ситуацій (і стратегій).
3. Відшукування оптимальних ситуацій (реалізація гри).

Таким чином, основною метою теорії ігор є розробка рекомендацій для успішної поведінки гравців у конфлікті, тобто знаходження для кожного з них “оптимальної стратегії”.

Історична довідка.

Першими дослідженнями ігор в економічній літературі слід вважати статті Курно (1838), Бертрана(1883) та Еджворта (1897), в яких розглядалися проблеми виробництва та ціноутворення в олігополії. Однак вони розглядалися тоді як доволі специфічні моделі і в деякому сенсі суттєво випереджали свій час.

Аналіз різних салонних ігор здійснювався ще у Стародавньому Китаї, але перші роботи, в яких знаходження оптимальних стратегій в іграх формулювалося як математична модель, з'явилися тільки у 17 столітті. Першим серйозним математичним результатом в цьому напрямку стала робота Е.Пермело 1912 року “Про застосування теорії множин до шахової гри”. В ній він довів, що в кожній позиції шахової партії один із гравців може форсовано виграти або забезпечити собі нічию, обираючи “правильні” відповіді налюбий хід супротивника. Хоча саме ця робота вважається першою роботою по теорії ігор, загально визнаним “роком народження ” теорії ігор став 1944 рік.

В 1944 році вийшла в світ монографія Джона фон Неймана і Оскара Моргенштерна “Теорія ігор та економічна поведінка”, яка по суті заклала фундамент загальної теорії ігор і обґрунтувала можливість аналізу величезного масиву економічних питань з допомогою теоретико-ігрових моделей. А в 1950 році Джон Неш (майбутній Нобелівський лауреат по економіці в 1994 р.) ввів поняття ситуації рівноваги, названої пізніше його іменем, як метода розв’язування безкоаліційних ігор.

За останні 30-35 років здійснився гігантський крок вперед в плані використання методів теорії ігор в таких економічних дисциплінах: теорія організації промисловості, структура галузевих ринків, теорія організації галузевих ринків, фінанси, маркетинг тощо. На мікрорівні теоретико-ігрові методи застосовуються при дослідженні моделей процесу торгівлі (моделі торгу, моделі аукціонів). На проміжному рівні агрегації вивчаються теоретико-ігрові моделі поведінки фірм на ринках факторів виробництва, а не тільки на ринку готової продукції, як в олігополії. Теоретико-ігрові моделі виникають у зв’язку із різними проблемами всередині фірми. Нарешті, на високому рівні агрегації, з міжнародною економікою пов’язані моделі конкуренції країн з приводу тарифів і торгової політики, а макроекономіка включає моделі, у яких, зокрема стратегічна взаємодія розглядається у контексті монетарної політики.

2⁰. Дослідимо матричну гру двох гравців з нульовою сумою, інформація про яку міститься в **табл.1.1**, в якій записана платіжна матриця (матриця вигравів) (1.1) $A = \{a_{ij}\}$. При цьому кожний із гравців здійснює один хід: гравець А обирає стратегію A_i , В - стратегію B_j . Після чого А отримує виграв a_{ij} за рахунок гравця В. Якщо $a_{ij} < 0$, то гравець А платить гравцю В суму $|a_{ij}|$. На цьому гра закінчується.

Кожна стратегія A_i ($i = \overline{1, m}$), B_j ($j = \overline{1, n}$), як правило, називається **чистою стратегією**. Якщо ж у грі здійснюються випадкові ходи, тоді відповідні стратегії називаються **змішаними** і в якості оцінки очікуваного виграву береться його математичне сподівання.

Побудова платіжної матриці не завжди проста, оскільки кількості стратегій m і n можуть виявитися дуже великими. Однак в принципі довільна скінченна гра може бути зведена до матричного виду.

Перш ніж описати знаходження оптимальних стратегій, розглянемо прості формалізації конфліктних ситуацій.

Приклад 1. Гра “пошук”.

Ця гра двох гравців А та В полягає в тому, що гравець А ховається, а гравець В шукає його. В розпорядженні гравця А є тільки два притулки

(схованки), кожний з яких він може використати за власним бажанням. Якщо використовується перший притулок, то будемо говорити, що гравець А вибрав стратегію A_1 . Коли вибрано другий притулок, то це означає, що вибрана стратегія A_2 . Аналогічно гравець В може шукати гравця А в першому або другому притулках, вибираючи відповідно стратегію B_1 і B_2 .

Умови гри: якщо гравець В знаходить гравця А, тоді останній платить йому 1 грн., якщо В не знаходить А, то В сам повинен заплатити гравцю А 1 грн.. Побудуємо платіжну матрицю для цієї гри. Оскільки в обох гравців є тільки по дві стратегії, то це є гра типу 2×2 , для якої платіжна матриця має такий вид:

Табл.1.2

A/B	B_1	B_2
A_1	-1	+1
A_2	+1	-1

Приклад 2. Гра з двома пальцями.

Дві людини одночасно показують один або два пальці і називають цифру 1 або 2, яка за їх думкою означає кількість пальців, що показує друга людина. Після того, як пальці показані і названі числа, відбувається розподіл виграшів за наступними правилами:

якщо обидва вгадали, скільки пальців показав кожний гравець, то фіксується нічия – виграш нуль у кожного гравця;

якщо обидва не вгадали, скільки пальців показав кожний гравець, то також фіксується нічия;

якщо тільки одна людина вгадала, скільки пальців показала інша людина, тоді вона (та що вгадала) отримає виграш за рахунок другої (тої, що не вгадала) у вигляді очок (грошей) пропорційно сумі показаних пальців обома учасниками гри.

Табл.1.3

A/B	$B_1(1,1)$	$B_2(1,2)$	$B_3(2,1)$	$B_4(2,2)$
$A_1(1,1)$	0	2	-3	0
$A_2(1,2)$	-2	0	0	3
$A_3(2,1)$	3	0	0	-4
$A_4(2,2)$	0	-3	+4	0

Приклад 3. Гра “старі і нові товари”.

Припустимо, що в розпорядженні є три види “старих” товарів A_1, A_2, A_3 , які поступають на ринок вже давно і попит на які добре відомий. З якогось

моменту в торгову мережу починають поступати “нові ” товари B_1, B_2, B_3 , які можуть можуть замінити “старі” товари A_1, A_2, A_3 , тобто зменшити попит на них. Із попередніх досліджень попиту відомі імовірності продажів “старих” товарів при появі в торговій мережі “нових” товарів.

Табл.1.4

A/B	B_1	B_2	B_3
A_1	0,5	0,6	0,8
A_2	0,9	0,7	0,8
A_3	0,7	0,5	0,6

Такий запис умов задачі означає, що якщо випустити в продаж новий товар B_1 , то попит на товар A_1 складає тільки 0,5 від початкового попиту на товар A_1 ; попит на A_2 складає 0,9 від попиту до появи B_1 ; A_3 - 0,7.

Задача полягає в тому, щоб обрати стратегію випуску на ринок “старих” товарів і “нових” товарів таким чином, щоб забезпечити оптимальне співвідношення між продажами “нових” і “старих” товарів.

Розв’яжемо цю задачу (знайдемо розв’язок гри) з тим, щоб пізніше узагальнити отримані правила. При цьому будемо міркувати наступним чином. Товари A та B виступають як гравці з протилежними інтересами: частину попиту, який втрачає гравець A , отримує гравець B . Спочатку станемо на точку зору гравця A і розглянемо всі його стратегії.

На стратегію A_1 його суперник B може відповісти довільною із стратегій B_1, B_2, B_3 . Очевидно, що стратегія B_1 є для нього (гравця B) найбільш привабливою, оскільки при цьому він відбирає $0,5 = \min\{0,5; 0,6; 0,8\}$ (половину попиту у гравця A).

На стратегію A_2 гравець B повинен відповісти найкращим для себе чином стратегією B_2 і відібрати 0,3 попиту у гравця A . І, нарешті, на стратегію A_3 відповідь також повинна бути B_2 (половина попиту переходить до гравця B).

Станемо тепер на точку зору гравця B . Якщо він обирає стратегію B_1 , то гравець A може відповісти довільною із стратегій A_1, A_2, A_3 . Ясно, що найкращою в цих умовах буде стратегія A_2 , оскільки гравець A зберігає $0,9$ $0,9 = \max\{0,5; 0,9; 0,7\}$ від бувшого у нього рівня попиту. На стратегію B_2 гравець A повинен за тими ж міркуваннями відповісти стратегією A_2 ($0,7 = \max\{0,6; 0,7; 0,5\}$), а на стратегію B_3 відповіддю може бути A_1 або A_2 (обидві відповіді однаково вигідні гравцю A ($0,8 = \max\{0,8; 0,8; 0,6\}$)).

Отже, гравці A і B діють таким чином, щоб не дати можливості отримати супернику переваги. Однак розглянемо, чи не можна добитися такої угоди між ними, тобто обрати такі стратегії A_i та B_j , які виявляться вигідними для обох гравців в умовах даної гри. Виявляється, що стратегії A_2

і B_2 (з виграшем 0,7 для гравця А) є оптимальними для обох гравців. Гравцю А явно не вигідно відмовлятися від стратегії A_2 , оскільки його найбільший виграш забезпечується тільки при такій стратегії. Гравцю В нічого не залишається іншого, як обрати стратегію B_2 при виборі гравцем А стратегії A_2 , оскільки будь-який відхід від стратегії B_2 приводить до збільшення його програшу.

Досягнута угода про стратегії A_2, B_2 може бути названа **положенням рівноваги**: якщо гравець А обере стратегію A_2 , то гравцю В нічого не залишається, як обрати найкращою стратегією B_2 і навпаки. Стратегії, що володіють такою властивістю, є оптимальними стратегіями гравців і утворюють так званий **розв'язок гри**.

Розглянемо загальний випадок гри із платіжною матрицею $\{a_{ij}\}$ $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ (див. табл.1.1), **припустивши, що існує її розв'язок в чистих стратегіях**.

Спочатку визначимо найкращу із стратегій гравця А з урахуванням всіх можливих відповідей на неї гравця В. При цьому ми повинні розраховувати на те, що на будь-яку стратегію A_i гравець В відповість стратегією B_j , для якої виграш гравця А виявиться мінімальним.

Позначимо $\alpha_i = \min_j a_{ij}, i = \overline{1, m}$.

Природно, що гравцю А вигідніше всього зупинитися на такій стратегії A_i , для якої значення α_i буде максимальним.

Позначимо

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} \quad (1.2)$$

Число α називають **чистою нижньою ціною гри або максимінним виграшем** (скорочено **максиміном**). Стратегія гравця А, якій відповідає максимін α , називається **максимінною стратегією** (A_{i_0}).

Якщо гравець А буде дотримуватися максимінної стратегії, то йому при будь-якій поведінці гравця В гарантований виграш, у всякому випадку не менший, ніж α .

Гравець В при оптимальній своїй поведінці повинен намагатися по можливості за рахунок своїх стратегій максимально зменшити виграш гравця А. Тому для гравця В відшукується

$$\max_j a_{ij} (j = \overline{1, n})$$

тобто визначається максимальний виграш гравця А при умові, що гравець В використає свою чисту стратегію B_j , а потім гравець В відшукує таку свою

стратегію B_{j_1} , при якій гравець А отримає мінімальний виграш, тобто знаходить

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \beta \quad (1.3)$$

Означення. Число β , визначене (1.3), називається **чистою верхньою ціною гри** і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може гарантувати собі гравець А.

Відповідна мінімаксу стратегія B_{j_1} гравця В називається **мінімаксною стратегією**.

В теорії ігор **принцип обережності**, який рекомендує гравцям дотримуватися максимінної і мінімаксної стратегії, називається **принципом мінімакса**.

Табл.1.5

$$\alpha = \max \{\alpha_i\}$$

A/B	$B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n$	$\min_j a_{ij} = \alpha_i$
A_1	$B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n$	α_1
A_2		α_2
....		
A_m		α_m
$\max_i a_{ij} = \beta_j$	$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n$	

$$\beta = \min \{\beta_j\}$$

Означення. Якщо в гри нижня і верхня чисті ціни гри співпадають, тобто

$$\alpha = \beta \quad (1.4)$$

то говорять, що ця гра має **сідлову точку** в чистих стратегіях і **чисту ціну гри**: $v = \alpha = \beta$.

Сідлова точка - це пара чистих стратегій (A_{i_0}, B_{j_0}) , для яких досягається рівність (1.4).

В поняття сідлової точки вкладається наступний сенс: якщо один із гравців дотримується стратегії, що відповідає сідловій точці, то другий гравець не зможе зіграти краще, ніж дотримуватися стратегії, що відповідає сідловій точці. При цьому мається на увазі, що краща поведінка гравця не повинна приводити до зменшення його виграшу, а гірша – може призвести до зменшення його виграшу; ці умови можна записати у вигляді співвідношень:

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \quad (1.5)$$

де A_i, B_j – довільні чисті стратегії гравців А та В відповідно, (A_{i_0}, B_{j_0}) – стратегії, що утворюють сідлову точку.

Пара чистих стратегій (A_{i_0}, B_{j_0}) , що утворюють сідлову точку і сідловий елемент $a_{i_0 j_0}$, називається **розв'язком гри**. Чисті стратегії A_{i_0}, B_{j_0} , що

утворюють сідлову точку, називаються оптимальними чистими стратегіями гравців А та В відповідно.

Для прикладу 3 з'ясуємо, чи існує її розв'язок у чистих стратегіях. Для цього табл.1.4 доповнимо справа мінімальними значеннями відповідних $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ рядків, а знизу- максимальними значеннями відповідних стовпців $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$:

Табл.1.5

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	α_i
A ₁	0,5	0,6	0,8	0,5
A ₂	0,9	0,7	0,8	0,7
A ₃	0,7	0,5	0,6	0,5
β_j	0,9	0,7	0,8	

В результаті згідно з (1.2) та (1.3) отримаємо

$$\alpha = \max\{0,5; 0,7; 0,5\} = \alpha_{22} = 0,7$$

$$\beta = \min\{0,9; 0,7; 0,8\} = \alpha_{22} = 0,7$$

Отже, нижня ціна гри дорівнює верхній ціні гри: $\alpha = \beta = 0,7$. Мінімаксні стратегії A₂ і B₂ утворюють сідлову точку. Ці стратегії є стійкими в тому сенсі, що відхилення від них не вигідне для обох гравців.

Таким чином, відповідь позитивна.

Для прикладу 1 з табл.1. 2 отримаємо

A/B	B ₁	B ₂	α_i
A ₁	-1	1	-1
A ₂	1	-1	-1
β_j	1	1	

$\alpha = -1, \beta = 1$. Тобто люба стратегія А є максимінною, а люба стратегія В є мінімаксною. При цьому А програє не більше 1грн., а В виграє не більше 1 грн. Таким чином не існує розв'язку в класі чистих стратегій.

Наступний приклад вказує на неєдиність сідлової точки.

A/B	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	α_i
A ₁	5	3	4	3	3
A ₂	7	2	0	-2	-2
A ₃	10	-1	-4	2	-4
β_j	10	3	4	3	

$$\alpha = \max\{3; -2; -4\} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = 3,$$

$$\beta = \min\{10; 3; 4; 3\} = \alpha_{12} = \alpha_{14} = 3.$$

Отже, $\alpha = \beta = 3$, ціна гри $v = 3$, а оптимальними чистими стратегіями гравця В є дві – друга та четверта. Тобто, (A_1, B_2) та (A_1, B_4) - дві сідлові точки даної гри.

Мотивація назв нижня та верхня чистими цінами гри визначається таким твердженням.

Теорема 1. Нехай $f(x,y)$ дійсна функція двох змінних $x \in A$, $y \in B$ і існують $\alpha = \max_{y \in B} \min_{x \in A} f(x,y)$ $\beta = \min_{x \in A} \max_{y \in B} f(x,y)$, тоді $\alpha \leq \beta$.

Зауваження. Матриця $\{a_{ij}\}$ є частинний випадок функції $f(x,y)$. Тобто, якщо покласти $x=i$, $i = \overline{1,m}$, $y=j$, $j = \overline{1,n}$, $a_{ij} = f(x,y)$, то з теореми отримаємо, що нижня чиста ціна не перевищує верхню чисту ціну гри в матричній формі.

Лекція 2. Оптимальні змішані стратегії в матричних іграх та їх властивості.

1. Постановка питання про розв'язування гри у змішаних стратегіях. Основна теорема теорії матричних ігор.
2. Властивості оптимальних змішаних стратегій.
3. Особливості розв'язків симетричних ігор.
4. Матричні ігри з перетвореними платіжними матрицями (афінне правило).
5. Спрощення матричної гри у випадку домінування однієї стратегії над іншою.

1. Дослідження матричної гри починається із знаходження її сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо матрична гра має сідлову точку в чистих стратегіях, то знаходженням цієї точки завершується дослідження гри. Якщо ж в матричній грі немає сідлової точки в чистих стратегіях, то можна знайти нижню і верхню чисті ціни цієї гри, які вказують, що гравець А не повинен надіятися на виграш більший, ніж верхня ціна гри, а також може бути впевненим в отриманні виграшу не меншого нижньої ціни гри.

Однак такі рекомендації стосовно поведінки гравців в матричній грі без сідлової точки в чистих стратегіях не можуть задовольнити дослідників і практиків. Покращення стратегій матричних ігор слід шукати у використанні секретності використання чистих стратегій і можливості багаторазового повторення ігор у вигляді партій.

Тому виникла ідея використовувати чисті стратегії випадково, з деякою ймовірністю. Це повністю забезпечує секретність їх використання. Кожний гравець може змінювати ймовірності використання своїх чистих стратегій таким чином, щоб максимально збільшити свій середній виграш і на цьому шляху отримати оптимальні стратегії.

Означення. **Змішаною стратегією гравця** називається повний набір ймовірностей використання його чистих стратегій:

$$S_A = S_A(p_1, p_2, \dots, p_m) = S_A(p),$$

$$S_B = S_B(g_1, g_2, \dots, g_n) = S_B(g),$$

де $p_1, p_2, \dots, p_m$ – ймовірності використання чистих стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$,
 $g_1, g_2, \dots, g_n$ – ймовірності використання чистих стратегій $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Оскільки ці стратегії за умовами гри повністю вичерпують можливі ходи гравців А та В, то вони утворюють повну групу подій. Тому

$$p_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad (2.1)$$

$$g_j \geq 0 \ (j = \overline{1, m}), \sum_{j=1}^n g_j = 1. \quad (2.2)$$

Оскільки кожний раз використання гравцем однієї чистої стратегії виключає використання іншої, то відповідні випадкові події є попарно несумісними.

Очевидно, що кожна чиста стратегія є частинним випадком змішаної стратегії, коли всі стратегії, крім обраної чистої стратегії, мають імовірності, рівні нулю, а ця обрана стратегія – імовірність, рівну одиниці.

Означення. Середній виграш гравця А в матричній грі з матрицею $\{a_{ij}\}$ виражається у вигляді математичного сподівання виграшів

$$M(\{a_{ij}\}, p, g) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i g_j. \quad (2.3)$$

Гравець А ставить за мету за рахунок зміни своїх змішаних стратегій S_A максимально збільшити свій середній виграш $M(\{a_{ij}\}, p, g)$, а гравець В- за рахунок своїх змішаних стратегій намагатися мінімізувати $M(\{a_{ij}\}, p, g)$, тобто для розв'язування гри необхідно знайти такі вектори p, g , для яких досягається верхня ціна гри

$$\beta = \min_g \max_p M(\{a_{ij}\}, p, g). \quad (2.4)$$

З другого боку, ситуація повинна бути аналогічною відносно гравця В, тобто нижня ціна гри повинна бути

$$\alpha = \max_p \min_g M(\{a_{ij}\}, p, g). \quad (2.5)$$

За аналогією з іграми, що мають сідлові точки в чистих стратегіях, вводиться наступне означення: **оптимальними змішаними стратегіями** гравців А та В називаються такі набори p^0, g^0 відповідно для А та В, які задовольняють рівність

$$\min_g \max_p M(\{a_{ij}\}, p, g) = \max_p \min_g M(\{a_{ij}\}, p, g) = M(\{a_{ij}\}, p^0, g^0). \quad (2.6)$$

Означення. Величина $M(\{a_{ij}\}, p^0, g^0)$, що задовольняє (2.6), називається **ціною гри** і позначається літерою v .

Оптимальні змішані стратегії і ціна гри називаються **розв'язком матричної гри**.

Виникає ключове питання: чи всі матричні ігри мають розв'язки у змішаних стратегіях. (Нагадаємо, що в класі чистих стратегій відповідь – негативна).

Позитивна відповідь на поставлене питання визначається наступним твердженням, вперше доведеним Нейманом.

Теорема 2. Основна теорема матричних ігор. Для матричної гри з довільною платіжною матрицею $\{a_{ij}\}$ величини

$$\alpha = \max_p \min_g M(\{a_{ij}\}, p, g), \quad \beta = \min_g \max_p M(\{a_{ij}\}, p, g)$$

існують і рівні між собою.

2. Наступне питання – як знаходити розв'язок матричної гри? На шляху отримання відповіді необхідно дослідити **властивості оптимальних змішаних стратегій**, які визначаються наступними твердженнями.

Теорема 3. Для того, щоб в матричній грі з ціною ν змішана стратегія $S_A(p^0)$ гравця А була оптимальною, необхідно і достатньо, щоб для довільної змішаної стратегії $S_B(g)$ гравця В виконувалася нерівність $\nu \leq M(\{a_{ij}\}, p^0, g)$.

Аналогічно для гравця В змішана стратегія $S_B(g^0)$ оптимальна тоді і тільки тоді, коли для будь-якої змішаної стратегії $S_A(p)$ гравця А виконується нерівність $M(\{a_{ij}\}, p, g^0) \leq \nu$.

Наслідок. Для того щоб $S_A(p^0)$ була **оптимальною змішаною стратегією** матричної гри з матрицею $\{a_{ij}\}$ і ціною гри ν , необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^0 \geq \nu, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.7)$$

Аналогічно для гравця В: щоб $S_B(g^0)$ була оптимальною змішаною стратегією гравця В, необхідно і достатньо виконання нерівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} g_j^0 \leq \nu, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.8)$$

Висновок. Розв'язок матричної гри зводиться до знаходження **невід'ємних розв'язків** лінійних нерівностей (2.7), (2.8) і лінійних рівнянь

$$\sum_{i=1}^m p_i^0 = 1, \quad \sum_{j=1}^n g_j^0 = 1. \quad (2.9)$$

Приклад 1. Знайти розв'язок матричної гри з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \max \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 = \alpha$$

$$\min \{1, 2, 3\} = 1 = \beta.$$

Оскільки $\alpha < \beta$, то робимо висновок, що дана задача не має сідлової точки, тобто розв'язку в чистих стратегіях.

Співвідношення (2.7)-(2.9) мають такий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 - p_2 - p_3 \geq \nu, \\ -p_1 - p_2 + 2p_3 \geq \nu, \\ -p_1 + 3p_2 - p_3 \geq \nu, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ p_i \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 - g_2 - g_3 \leq \nu, \\ -g_1 - g_2 + 3g_3 \leq \nu, \\ -g_1 + 2g_2 - g_3 \leq \nu, \\ g_1 + g_2 + g_3 = 1, \\ g_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{array} \right.$$

Для розв'язування I-ої системи можна спочатку замінити перші три нерівності на рівняння і розв'язати систему рівнянь. Якщо всі значення p_1, p_2, p_3 невід'ємні, то в результаті отримаємо оптимальну змішану стратегію гравця А.

$$\text{В результаті: } p_1 = \frac{6}{13}, p_2 = \frac{3}{13}, p_3 = \frac{4}{13}, \nu = -\frac{1}{13}.$$

Аналогічно для II-ої системи запропонований шлях дає:
 $g_1 = \frac{6}{13}, g_2 = \frac{4}{13}, p_3 = \frac{3}{13}$ - оптимальна змішана стратегія гравця В.

Приклад 2.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 6 & 2 \end{array} \right) \max = 2 = \alpha,$$

$$\min \{3, 4, 6\} = 3 = \beta.$$

В цьому випадку використаний в прикладі 1 підхід вже не спрацює: слід перебирати поєднання нерівностей і рівнянь:

$$p^0 = (0, 0, 1), \quad g^0 = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad \nu = 2.$$

На шляху реалізації вказаного підходу розв'язування матричної гри у змішаних стратегіях корисним є наступне твердження.

Теорема 4. Нехай для матричної гри з матрицею $\{a_{ij}\}$ і ціною гри ν оптимальними змішаними стратегіями є $S_A(p_1, p_2, \dots, p_m)$, $S_B(g_1, g_2, \dots, g_n)$. Тоді якщо для деякого i $\sum_{j=1}^n a_{ij} g_j < \nu$, то $p_i = 0$. Якщо ж для деякого j $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i > \nu$, то $g_j = 0$.

3. Розглянемо деякі особливості розв'язків так званих симетричних ігр.

Означення. Квадратна матриця $\{a_{ij}\}$ називається **кососиметричною**, якщо $a_{ij} = -a_{ji}$ для всіх $i \neq j$. Матрична гра називається **симетричною**, якщо її матриця є косисиметричною.

Матриця $\{a_{ij}\}$ з прикладу 2 теми 1 є кососиметричною, а відповідно гра – симетричною.

Теорема 5. Ціна симетричної гри дорівнює нулю ($\nu = 0$). Якщо $S_A(p^0)$ є оптимальною змішаною стратегією гравці А, то $S_B(p^0)$ також є оптимальною змішаною стратегією В.

Висновок. На підставі цього твердження суттєво спрощується розв'язування матричної гри.

4. В багатьох практично важливих задачах елементи платіжної матриці є великими числами. Спрощення розв'язування такого типу задач дозволяє наступне твердження.

Теорема 6 (афінне правило). Нехай задана матрична гра Γ_b з матрицею $\{a_{ij}\}$ і з ціною гри ν .

Тоді оптимальні змішані стратегії гравців матричної гри Γ_b з матрицею $\{b_{ij}\} = \{ba_{ij} + c\}$, де $b > 0$, співпадають з оптимальними змішаними стратегіями відповідних гравців в матричній грі Γ , а ціна гри Γ_b дорівнює $\nu_b = b\nu + c$.

5. Перш ніж розпочинати знаходження розв'язку матричної гри необхідно проаналізувати платіжну матрицю з тим, щоб спробувати спростити гру за рахунок зменшення числа стратегій, а, отже, і числа невідомих та нерівностей у системах (2.7), (2.8).

Означення. Якщо для стратегій A_i та A_k виконується співвідношення

$$a_{ij} \geq a_{kj}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.10)$$

причому хоча б одна із n нерівностей є строгою, тоді говорять, що стратегія A_i **домінує** або переважає стратегію A_k .

Аналогічно для гравця В: стратегія B_j домінує стратегію B_r , якщо виконуються нерівності

$$a_{ij} \geq a_{ir}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.11)$$

причому хоча б одна із нерівностей (2.11) є строгою.

Теорема 7. Нехай: 1) Γ -матрична гра з $m \times n$ - матрицею $\{a_{ij}\}$ і чиста стратегія A_i домінує стратегію A_k . 2) $\{a_{ij}^{(1)}\}$ - матриця, що отримується з $\{a_{ij}\}$ шляхом виключення з неї k -го рядка, а $\Gamma^{(1)}$ - відповідна матрична гра.

Тоді: 1) ціна гри $\Gamma^{(1)}$ співпадає з ціною гри Γ ; 2) кожна оптимальна змішана стратегія гравця В в грі $\Gamma^{(1)}$ є також його оптимальною змішаною стратегією в грі Γ ; 3) якщо $S_A(p_1^0, p_2^0, \dots, p_{k-1}^0, p_k^0, \dots, p_m^0)$ є оптимальною змішаною стратегією гравця А в грі $\Gamma^{(1)}$, тоді його змішана стратегія $S_A(p_1^0, p_2^0, \dots, p_{k-1}^0, 0, p_{k+1}^0, \dots, p_m^0)$ є оптимальною в грі Γ .

Домінування стратегій для гравця В також дає додаткові можливості для зменшення числа стовпців матриці виграшів.

Теорема 8. Нехай Γ - матрична гра з матрицею $\{a_{ij}\}$, в якій стратегія B_k домінує стратегію B_r . Позначимо $\{a_{ij}\}^{(1)}$ матрицю, отриману з $\{a_{ij}\}$ виключенням k -го стовпця, $\Gamma^{(1)}$ - матрична гра з матрицею $\{a_{ij}\}^{(1)}$. Тоді ціна гри $\Gamma^{(1)}$ така ж, як ціна гри Γ . При цьому всяка оптимальна змішана стратегія гравця А в $\Gamma^{(1)}$ є також його оптимальною стратегією в Γ ; якщо $w = (w_1, \dots, w_{k-1}, w_{k+1}, \dots, w_n)$ є оптимальною змішаною стратегією гравця В в $\Gamma^{(1)}$, то $g = (w_1, \dots, w_{k-1}, 0, w_{k+1}, \dots, w_n)$ - оптимальна змішана стратегія гравця В в Γ .

Приклад. Розглянемо матричну гру з матрицею

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Позначимо оптимальні змішані стратегії гравців А та В відповідно $S_A(p_1, p_2, p_3, p_4)$, $S_B(g_1, g_2, g_3, g_4)$. Очевидно, що стратегія A_3 домінує стратегію A_1 , тому можна відкинути перший рядок, поклавши $p_1 = 0$. В результаті отримаємо нову матрицю

$$\{a_{ij}\}^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

в якій B_4 домінує B_2 , а тому викреслюємо четвертий стовпець, покладаючи $g_4 = 0$. Тобто приходимо до матриці

$$\{a_{ij}\}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

у якій уже відсутнє домінування.

Отже, вихідна гра з матрицею порядку 4×4 з допомогою домінування зведена до гри з матрицею порядку 3×3 .

Лекція 3-4. Методи знаходження розв'язків матричних задач теорії ігор.

1. Дослідження часткових випадків.
 - 1.1. Гра порядку 2×2 .
 - 1.2. Матричні ігри порядку $2 \times n$ та $m \times 2$. Графоаналітичний метод.
2. Розв'язування матричних ігор в загальному випадку методами лінійного програмування.

1. Надалі для зручності будемо використовувати наступні позначення змішаних стратегій гравців А та В відповідно:

$$S_A(p_1, p_2, \dots, p_m) = (x_1, x_2, \dots, x_m) = x, \quad (3.1)$$

$$S_B(g_1, g_2, \dots, g_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) = y, \quad (3.2)$$

тобто стратегія A_i гравця А обирається з імовірністю $x_i (i = \overline{1, m})$, стратегія B_j гравця В обирається з імовірністю $y_j (j = \overline{1, n})$.

Згідно із співвідношеннями (2.1), (2.2)

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, m}), \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad (3.3)$$

$$y_j \geq 0 (j = \overline{1, n}), \sum_{j=1}^n y_j = 1. \quad (3.4)$$

1.1. Матрична гра порядку 2×2 задається матрицею виграшу гравця А: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Розв'язування цієї задачі слід розпочинати із пошуку сідлової точки в чистих стратегіях. Якщо сідлова точка (елемент) знайдена, то процес знаходження розв'язку матричної задачі завершується, оскільки в цьому випадку знайдена ціна гри – сідловий елемент і сідлова точка, тобто пара чистих стратегій обох гравців, які є оптимальними стратегіями.

Якщо ж сідлова точка в чистих стратегіях відсутня, тоді треба знайти сідлову точку у змішаних стратегіях. Ця точка існує згідно з основною теоремою матричних ігор (теорема 2). Згідно з наслідком теореми 3 (співвідношення (2.7)-(2.8) з урахуванням (3.1), (3.2) для $m=2, n=2$) для оптимальності змішаних стратегій x та y необхідно і достатньо, щоб для невід'ємних змінних x_1, x_2, y_1, y_2 виконувалися такі співвідношення:

$$(3.5) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \geq v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \geq v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \leq v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Доведемо, що у випадку відсутності сідлової точки в чистих стратегіях нерівності в (3.5), (3.6) перетворюються в рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Справді, нехай гра не має сідлової точки в чистих стратегіях, тоді оптимальні значення змішаних стратегій (імовірності) задовольняють нерівностям

$$\begin{aligned} 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1, \\ 0 < y_1 < 1, \quad 0 < y_2 < 1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

оскільки за означенням чисті стратегії обирають з ймовірностями 0 або 1.

Припустимо, що обидві нерівності в (3.5) будуть строгими

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 > v, \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 > v,$$

тоді згідно з теоремою 4 $y_1 = y_2 = 0$, що суперечить умовам (3.8). Аналогічно доводиться, що обидві нерівності з (3.6) не можуть бути строгими нерівностями, неможливі також ситуації, коли тільки одна із нерівностей (3.5), (3.6) є строгою.

Отже, якщо матрична гра порядку 2×2 не має сідлової точки, то оптимальні змішані стратегії гравців і ціну гри можна знайти, розв'язавши систему рівнянь (3.7). Розв'язок системи рівнянь (3.7) має такий вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, & x_2 &= \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \\ y_1 &= \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, & y_2 &= \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}. \quad (3.10)$$

Співвідношення (3.9), (3.10) мають сенс, якщо виконуються такі системи нерівностей:

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0, \\ a_{11} - a_{12} > 0, \\ a_{22} - a_{12} > 0, \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0, \\ a_{11} - a_{12} < 0, \\ a_{22} - a_{12} < 0, \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Вони отримуються на підставі нерівностей

$$0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1, \quad 0 < y_1 < 1, \quad 0 < y_2 < 1$$

з урахуванням (3.7).

Неважко помітити, що в системах (3.11) відображене припущення про відсутність в матричній грі сідлової точки. Справді, жоден з чотирьох елементів $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ не може задовольнити (3.11), якщо він мінімальний у своєму рядку і максимальний у своєму стовпці (умова сідлової точки).

Приклад 3.1.

Розглянемо розв'язок гри “пошук” (пр. 1.1), матриця виграшів якої має вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Як зазначалося вище, в цій грі немає сідлової точки в}$$

чистих стратегіях. Тому скориставшись формулами (3.9), (3.10), отримаємо

$$x_1 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = 0,5, \quad x_2 = 1 - x_1 = 0,5,$$

$$y_1 = \frac{-1-1}{-1-1-1-1} = 0,5, \quad y_2 = 1 - y_1 = 0,5,$$

$$v = \frac{1-1}{-1-1-1-1} = 0.$$

Отже, оптимальним способом ведення цієї гри є використання своїх стратегій з однаковими ймовірностями, рівними 0,5.

1.2. В матричній грі $2 \times n$ матриця виграшів гравця A має такий вид:

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \end{pmatrix}.$$

Якщо така гра має сідлову точку, то її легко знайти і отримати розв'язок.

Припустимо, що гра не має сідлової точки. Тоді необхідно знайти такі змішані стратегії $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ та ціну гри v , які згідно з (2.7)-(2.9) повинні задовольняти співвідношення

$$\{a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \geq v, j = \overline{1, n}, \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq v, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Оскільки гра не має сідлової точки, то нерівності (3.13) замінюються рівняннями

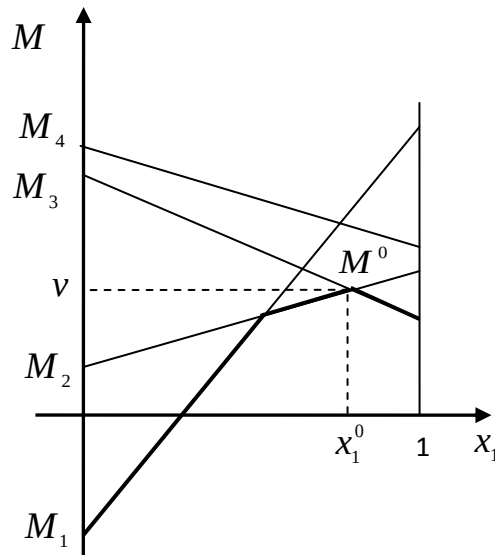
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = v. \end{cases} \quad (3.15)$$

Для розв'язування систем (3.12), (3.14), (3.15) скористаємося графічним методом. З цією метою введемо позначення для лівої частини нерівностей (3.12) з урахуванням рівності $x_1 + x_2 = 1$

$$M_j(x_1) = a_{1j}x_1 + a_{2j}(1-x_1) = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}, j = \overline{1, n}, \quad (3.16)$$

де $M_j(x_1)$ - це середній виграш гравця A при умові, що він використовує свою змішану стратегію, а гравець B - свою чисту стратегію B_j .

Кожному значенню $j = 1, 2, \dots, n$ згідно з (3.16) відповідає пряма в прямокутній системі координат MOx_1 (див. мал. 3.1, де $j = 1, 2, 3, 4$).



Мал. 3.1

Мета гравця B - мінімізувати виграш гравця A за рахунок вибору своїх стратегій. Тому обчислюємо $\min_j M_j(x_1) = M(x_1)$, де $M(x_1)$ - нижня межа множини обмежень. На мал. 3.1 графік функції $M(x_1)$ зображено жирною ламаною.

Мета гравця A максимізувати свій виграш за рахунок вибору x_1 , тобто обчислити

$$\max_{0 < x_1 < 1} M(x_1) = M(x_1^0).$$

На мал. 3.1 точка M^0 відповідає максимальному значенню $M(x_1^0)$, яке отримується при $x_1 = x_1^0$. Ціна гри $v = M(x_1^0)$, оскільки

$$v = \min_j \max_{x_1} M_j(x_1) = M(x_1^0).$$

Таким чином графічно визначається оптимальна змішана стратегія $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ гравця A і пара чистих стратегій гравця B , які у перетині утворюють точку M^0 . На мал. 3.1 зображені стратегії B_2 і B_3 . Для таких стратегій нерівності (3.12) перетворюються у рівняння.

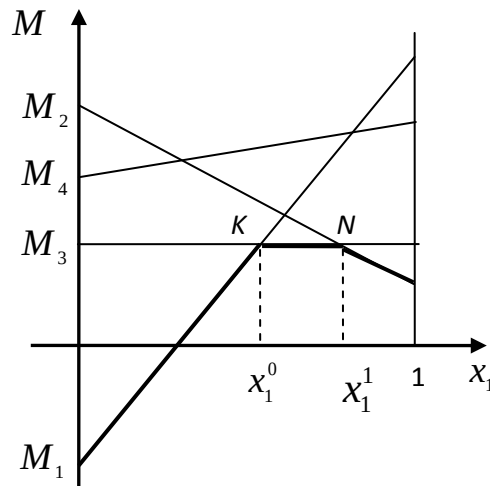
Тепер можна розв'язати систему рівнянь $M_j(x_1) = v$ ($j = 2, 3$) і точно визначити значення x_1^0 та v (графічно вони визначаються наближено). Потім

поклавши всі значення $y_j = 0$ для тих j , для яких $M_j(x_1)$ не утворюють точку M^0 , можна знайти y_j для тих j , для яких $M_j(x_1)$ утворюють точку M^0 , розв'язуючи систему рівнянь (3.15). Для прикладу, наведеного на мал. 3.1, це така система:

$$\begin{cases} a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = v, \\ a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = v, \end{cases}$$

а решта $y_1 = y_4 = 0$.

Зауваження. Якщо при деякій стратегії B_{j_0} отримується точка M^0 і $a_{1j_0} = a_{2j_0}$, то максимальне значення нижньої границі множин обмежень зображається відрізком, паралельним осі Ox_1 . В цьому випадку гравець А має безмежно багато оптимальних значень x_1^0 , а ціна гри $v = a_{1j_0} = a_{2j_0}$. Цей випадок зображено на мал. 3.2, де $j_0 = 3$ і відрізок KN зображає верхнє значення границі множини обмежень, оптимальні значення x_1 знаходяться у межах x_1^0, x_1^1 . У гравця B є чиста оптимальна стратегія B_{j_0} .



Мал. 3.2

Приклад 3.2. Вибір сільськогосподарської культури.

Фермер має можливість вирощувати дві культури. Прибуток фермера від реалізації вирощеної культури залежить від обсягу отриманої продукції. Урожайність першої культури вища при сухій погоді, а другої — при більш вологій. Стани погоди у літній період можна розглядати як наступні стратегії природи:

1. Літо спекотливе сухе.
2. Літо спекотливе вологе.
3. Літо тепле вологе.
4. Літо тепле сухе.
5. Літо прохолодне сухе.

6. Літо прохолодне вологе.

Будемо вважати фермера гравцем A , а природу – гравцем B . Стратегії фермера:

A_1 - вирощувати першу культуру,

A_2 - вирощувати другу культуру.

Розрахунки прибутку фермера в млн. грн. в залежності від стану погоди зведені в таблицю

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}.$$

Потрібно визначити оптимальні стратегії поведінки фермера.

Розглядаючи дану задачу як матричну гру порядку 2×6 , визначимо оптимальні стратегії гравців.

Очевидно, що ця гра не має сідлової точки в чистих стратегіях, тому скористаємося графічним методом розв'язування для знаходження змішаних стратегій. З цієї метою позначимо x_1 - імовірність використання гравцем A стратегії A_1 , x_2 - імовірність використання гравцем A стратегії A_2 ; через $y = (y_1, y_2, \dots, y_6)$ - змішану стратегію гравця B .

На мал. 3.3 наведені графіки середніх виграшів гравця A $M_j(x_1)$ ($j = \overline{1,6}$), де

$$M_1 : (10 - 1)x_1 + 1 = 9x_1 + 1,$$

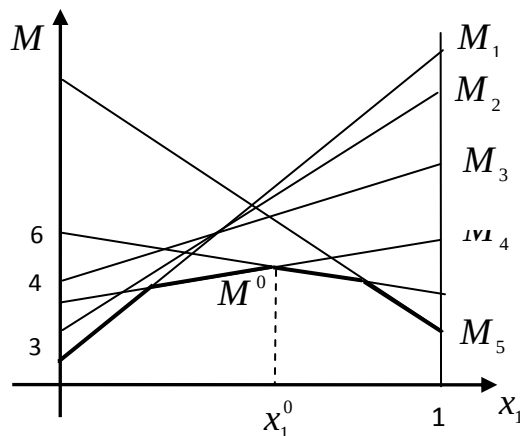
$$M_2 : (8 - 2)x_1 + 2 = 6x_1 + 2,$$

$$M_3 : (6 - 4)x_1 + 4 = 2x_1 + 4,$$

$$M_4 : (4 - 3)x_1 + 3 = x_1 + 3,$$

$$M_5 : (2 - 12)x_1 + 12 = -10x_1 + 12,$$

$$M_6 : (3 - 6)x_1 + 6 = -3x_1 + 6.$$



Мал. 3.3

Нижня межа обмежень зображена жирною лінією. Очевидно, що максимальне значення $M(x_1)$ досягається в точці M^0 , яка утворюється перетином ліній M_4 і M_6 . Тому покладемо $y_1 = y_2 = y_3 = y_5 = 0$, $y_4 + y_6 = 1$. Для знаходження значень x_1, x_2, y_4, y_6 та v потрібно розв'язати системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = v \\ 3x_1 + 6x_2 = v \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 4y_4 + 3y_6 = v \\ 3y_4 + 6y_6 = v \\ y_4 + y_6 = 1 \end{cases}$$

Розв'язок цих систем:

$$x_1 = \frac{3}{4}; x_2 = \frac{1}{4}; y_4 = \frac{3}{4}; y_6 = \frac{1}{4}; v = \frac{15}{4} = 3,75 (\text{млн.грн.}).$$

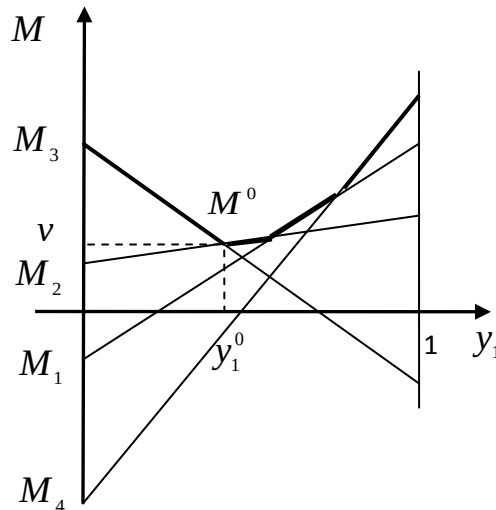
Використати це рішення фермер може наступним чином: на $\frac{3}{4}$ всієї площі вирощувати першу культуру, а на решті – другу культуру, тоді прибуток складатиме 3,75 млн. грн.

Розглянемо **матричні ігри порядку $m \times 2$** . Матриця виграшів гравця A в цьому випадку має такий вид

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}.$$

Змішані стратегії $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2)$ відповідно гравців A і B визначаються аналогічно, як і у випадку гри $2 \times n$. Нехай по горизонтальній осі відкладаються значення y_1 від 0 до 1, а по вертикальній – значення середнього виграшу $M_i(y_1)$ гравця A при умові, що гравець A використає свою чисту стратегію $A_i (i = \overline{1, m})$, а гравець B - свою змішану стратегію $(y_1, 1 - y_1) = y$. Наприклад, при $m = 4$ графічно $M_i(y_1)$ можуть бути представлені так, як зображено на мал. 3.4. Гравець A намагається максимізувати свій середній виграш, тому він прагне знайти $\max_i M_i(y_1) = M(y_1)$, де $M_i(y_1) = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 = (a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}$. На мал. 3.4 функція $M(y_1)$ зображена жирною ламаною і являє собою верхню межу(границю) множини обмежень. Гравець B намагається мінімізувати $M(y_1)$ за рахунок вибору своєї стратегії y_1 , тобто

$$\min_{y_1} M_i(y_1) = M(y_1^0) = v.$$



Мал. 3.4

На мал. 3.4 значення $M(y_1^0)$ позначено точкою M^0 . Іншими словами, визначаються такі дві стратегії A_{i_0}, A_{i_1} та імовірність y_1 для гравця B , для яких досягається рівність

$$(3.16) \quad \min_{y_1} \max_i [(a_{i1} - a_{i2})y_1 + a_{i2}] = v \text{ або } \begin{cases} a_{i_0 1}y_1 + a_{i_0 2}(1 - y_1) = v, \\ a_{i_1 1}y_1 + a_{i_1 2}(1 - y_1) = v. \end{cases}$$

На мал. 3.4 видно, що $i_0 = 2, i_1 = 3$, ціна гри v – ордината точки M^0 . Для решти чистих стратегій гравця A в оптимальній змішаній стратегії:

$$x_i = 0, \quad a_{i1}y_1 + a_{i2}(1 - y_1) > 0 \quad (i \neq i_0, i \neq i_1).$$

Отже, розв'язуючи систему (3.16), отримаємо оптимальну змішану стратегію гравця B $y = (y_1, y_2)$ та ціну гри v . Оптимальну змішану стратегію для гравця A знайдемо, розв'язуючи наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_{i_0 1}x_{i_0} + a_{i_1 1}(1 - x_{i_0}) = v, \\ a_{i_0 2}x_{i_0} + a_{i_1 2}(1 - x_{i_0}) = v, \\ x_{i_1} = 1 - x_{i_0}. \end{cases}$$

Приклад 3.3. Вибір мінеральних добрив.

Фермер планує вирощувати певну культуру на відведений для цієї мети ділянці землі. Урожайність культури залежить від кількості внесених добрив і від стану погоди.

Розглядаються два можливих види погоди:

1. Літо сухе. 2. Літо вологе.

Можливі варіанти внесення добрив наступні:

1. Кількість добрив на 1 га відповідно нормі.
2. Кількість добрив на 1 га більші цієї норми на 30%.
3. Кількість добрив на 1 га більші цієї норми на 40%.

Будемо вважати фермера гравцем A , а стан природи гравцем B . При цьому в A є три стратегії, а в B – дві. Будемо вважати, що ціна реалізації тонни культури не залежить від урожайності вирощеної культури і затрат на її отримання та реалізацію. Фермеру необхідно знайти оптимальну кількість добрив на 1 га для отримання максимального прибутку при можливому максимально несприятливому літі. Фермер здійснив розрахунок прибутку в залежності від можливих стратегій своїх та природи, тобто отримав наступну матрицю прибутків (в млн.грн.):

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2,5 \end{pmatrix}.$$

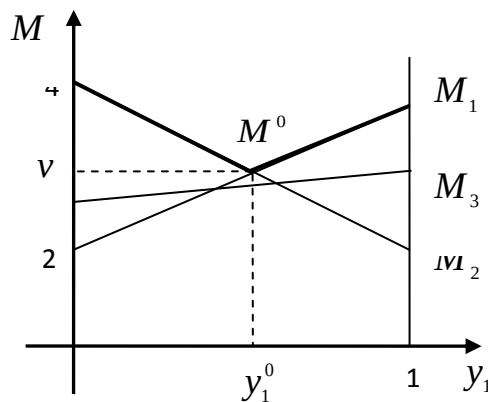
Будемо вважати ці прибутки як матрицю вигравішів гравця A і знайдемо розв'язок такої гри порядку 3×2 .

Видно, що в цій грі відсутня точка в чистих стратегіях. Нехай $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2)$ – змішані стратегії гравців A та B відповідно. Побудуємо графічне зображення вигравішів гравця A для кожної його чистої стратегії (мал.3.5). Аналітичні залежності виражаються формулами:

$$M_1(y_1) : (4 - 2)y_1 + 2 = 2y_1 + 2,$$

$$M_2(y_1) : (2 - 4)y_1 + 4 = -2y_1 + 4,$$

$$M_3(y_1) : (3 - 2,5)y_1 + 2,5 = 0,5y_1 + 2,5.$$



Мал. 3.5

Із мал.3.5 видно, що точку M^0 утворюють стратегії A_1 та A_2 .

Отже, $x_3 = 0$ і для знаходження y_1 та v потрібно скласти рівняння, що відповідають цим стратегіям:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2(1 - y_1) = v, \\ 2y_1 + 4(1 - y_1) = v, \\ y_2 = 1 - y_1. \end{cases}$$

Розв'язок системи: $y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}, v = 3$. Для знаходження x_1 і x_2 слід розв'язати рівняння $4x_1 + 2x_2 = v, v = 3$ або $4x_1 + 2(1 - x_1) = 3$, звідки $x_1 = 0,5, x_2 = 0,5$.

Отриманий результат можна використати так: нехай норма внесення добрив рівна 1 у відповідності зі стратегією A_1 ; тоді, використовуючи A_2 , фермер повинен внести 1,3 норми добрив на 1 га. Оскільки кожна з цих стратегій використовується з імовірністю 0,5, то оптимальний обсяг внесення добрив складе середнє значення норм при цих стратегіях:

$$1 \cdot 0,5 + 1,3 \cdot 0,5 = 1,15 \text{ норми на 1 га.}$$

Тоді фермер отримає прибуток $v = 3$ млн.грн.

2. Розглянемо один із методів розв'язування матричної гри з допомогою лінійного програмування.

В цьому методі припускається, що ціна гри додатна. Ця умова не порушує загальності, оскільки згідно з теоремою 6 завжди можна підібрати таке число C , додавання якого до всіх елементів матриці виграшів дає матрицю з додатними елементами і, отже, з додатним значенням ціни гри. При цьому оптимальні змішані стратегії обох гравців не зміняться.

Отже, нехай дана матрична гра з матрицею $\{a_{ij}\}$ порядку $m \times n$. Згідно з наслідком теореми 3 оптимальні змішані стратегії $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ відповідно гравців A і B і ціна гри v повинні задовольнити співвідношення:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m x_i = 1, & x_i \geq 0 (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v (j = \overline{1, n}), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n y_j = 1, & y_j \geq 0 (j = \overline{1, n}), \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq v (i = \overline{1, m}). \end{cases} \quad (3.18)$$

Розділимо всі рівняння і нерівності в (3.17) і (3.18) на $v > 0$ і введемо нові позначення:

$$\frac{x_i}{v} = p_i (i = \overline{1, m}), \quad \frac{y_j}{v} = q_j (j = \overline{1, n}).$$

Тоді отримаємо відповідно задачі (3.17), (3.18) в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_i &= \frac{1}{v}, \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}), p_i \geq 0 (i = \overline{1, m}), \\ \sum_{j=1}^n q_j &= \frac{1}{v}, \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}), q_j \geq 0 (j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Оскільки гравець A намагається знайти такі значення $x_i (i = \overline{1, m})$, а отже, $p_i (i = \overline{1, m})$, щоб ціна гри v була максимальною, то розв'язування першої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень $p_i (i = \overline{1, m})$, для яких

$$\sum_{i=1}^m p_i \rightarrow \min, \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq 1, j = \overline{1, n}. \quad (3.19)$$

Гравець B ставить за мету знайти такі значення $y_j (j = \overline{1, n})$, а отже, $q_j (j = \overline{1, n})$, для яких ціна гри v була мінімальною. Тому розв'язування другої задачі зводиться до знаходження таких невід'ємних значень $q_j (j = \overline{1, n})$, для яких

$$\sum_{j=1}^n q_j \rightarrow \max, \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j \leq 1, i = \overline{1, m}. \quad (3.20)$$

Сукупності співвідношень (3.19), (3.20) є парою двоїстих задач лінійного програмування, для розв'язування яких розроблено якісні методи, зокрема, симплексний метод.

Зауваження. Доцільно розв'язувати задачу лінійного програмування (3.20) симплексним методом, оскільки вона просто зводиться до канонічної форми. При цьому в нульовому рядку останньої симплексної таблиці, що містить оптимальний план, буде виписано оптимальний план двоїстої задачі (3.19).

Знайшовши оптимальні плани обох задач ЛП, змішані стратегії $x_i (i = \overline{1, m})$, $y_j (j = \overline{1, n})$, знаходяться за формулами:

$$\begin{aligned} x_i &= v p_i (i = \overline{1, m}), \\ y_j &= v q_j (j = \overline{1, n}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

де ціна гри $v = \frac{1}{q^0}$, $q^0 = \max \sum_{i=1}^m q_i$.

Приклад 3.4. Задача про оптимальні пропорції у виробництві продукції.

Підприємство може випускати чотири види продукції A_1, A_2, A_3, A_4 одержуючи прибуток у залежності від попиту, який умовно може бути визначений трьома різними станами B_1, B_2, B_3 .

Матриця виграшів

$$\{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

де a_{ij} - прибуток підприємства за умови випуску A_i при попиті B_j .

Потрібно знайти оптимальні пропорції у виробництві продукції, які б гарантували деяку середню величину прибутку за будь-якого попиту, вважаючи його невизначеним.

Проаналізувавши матрицю $\{a_{ij}\}$ робимо висновок, що третій рядок домінує над четвертим, тому для подальшого четвертий рядок вилучаємо. Економічно це означає недоцільність виробництва продукції A_4 за даних умов. Розв'язок задачі побудуємо як дослідження моделі гри виробника з невідомими умовами попиту.

Визначимо верхню та нижню ціни гри:

попит Вид прод.	B_1	B_2	B_3	$\alpha_i = \min_j a_{ij}$
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
$\beta_j = \max_i a_{ij}$	9	6	8	6

Оскільки $\max_i \min_j a_{ij} = 4 \neq \min_j \max_i a_{ij} = 6$, то робимо висновок, що дана задача не має розв'язку в чистих стратегіях, а тому оптимальний розв'язок будемо шукати у змішаних стратегіях:

$$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3).$$

Введемо нові змінні

$$p_i = \frac{x_i}{v}, i = \overline{1,3} \text{ та } q_j = \frac{y_j}{v}, j = \overline{1,3}.$$

Використавши (3.19), (3.20), запишемо дві двоїсті задачі лінійного програмування:

Задача 1

$$z = p_1 + p_2 + p_3 (\min)$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 9p_2 + 7p_3 \geq 1 \\ 6p_1 + 4p_2 + 5p_3 \geq 1 \\ 8p_1 + 2p_2 + 4p_3 \geq 1 \\ p_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Задача 2

$$f = q_1 + q_2 + q_3 (\max)$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 6q_2 + 8q_3 \leq 1 \\ 9q_1 + 4q_2 + 2q_3 \leq 1 \\ 7q_1 + 5q_2 + 4q_3 \leq 1 \\ q_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Враховувавши зауваження, розв'яжемо симплексним методом задачу 2, звівши її до канонічної форми:

(3.22)

q_2 , тоді стане $\frac{1}{6}$, якщо q_3 , то стане $\frac{1}{9}$. Ясно, що вибір q_2 є найкращим в сенсі скорочення числа ітерацій.

В табл. 3 міститься оптимальний план задачі (3.22)

$$q^0 = \left\{ \frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0 \right\}.$$

Використовуючи теореми про властивості оптимальних розв'язків двоїстих задач, визначимо оптимальний розв'язок задачі 1, записаний у першій стандартній формі:

$$\begin{array}{cccccc} q_4 & q_5 & q_6 & q_1 & q_2 & q_3 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 \\ \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 & \frac{1}{27} \end{array}$$

Отже, оптимальним розв'язком задачі 1, записаній у першій стандартній формі є:

$$p^0 = \left\{ \frac{2}{27}; 0; \frac{1}{9}; 0; 0 \frac{1}{27} \right\}, \text{ а } \min z = \max f = \frac{5}{27}.$$

Скористаємось тим, що $v = \frac{1}{q^0} = \frac{1}{\max \sum_{i=1}^3 q_i}$, отримаємо ціну гри:

$$v = \frac{1}{\frac{5}{27}} = \frac{27}{5} = 5,4.$$

Оптимальну стратегію $\{x_1^0, x_2^0, x_3^0\}$ (план випуску продукції) знаходимо, використовуючи (3.21):

$$x_1^0 = 5,4 \cdot \frac{2}{27} = 0,4; \quad x_2^0 = 5,4 \cdot 0 = 0; \quad x_3^0 = 5,4 \cdot \frac{1}{9} = 0,6.$$

Таким чином, підприємству доцільно випускати 40% продукції A_1 , 60% продукції A_3 і не виготовляти продукцію A_2 .

Знайшовши за формулами (3.21) оптимальну стратегію попиту, отримаємо $y^0 = \{0,2; 0,8; 0\}$. Отже, оптимальний попит знаходиться на 20% у стані B_1 та на 80% у стані B_2 .

Лекція 5-6. Біматричні ігри.

1. Некооперативні ігри.

- 1.1. Основні поняття і ситуація рівноваги.
- 1.2. Біматричні ігри порядку 2×2 . Пошук рівноважних ситуацій.
- 1.3. Задача про будівництво об'єктів.
- 1.4. Задача про квоти нафтовидобувних країн.
- 1.5. Задача про боротьбу за ринки.
- 1.6. Неєдиність точок рівноваги у біматричних іграх.

2. Кооперативні ігри.

- 2.1. Конкурс на реалізацію проекту.
- 2.2. Арбітражний розв'язок Неша.
- 2.3. Оптимальний розподіл прибутку.

1. В матричній грі інтереси двох гравців були прямо протилежні, тобто мова велась про антагоністичну гру. Однак доволі частіше зустрічаються ситуації, в яких інтереси гравців хоча і не співпадають, але не обов'язково є протилежними.

Розглянемо конфліктну ситуацію, в якій два гравці мають такі можливості для вибору своєї лінії поведінки:

а) I-ий гравець може обрати довільну із стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$;

б) II-ий — $B_1, B_2, \dots, B_n$.

При цьому в ситуації $\{A_i, B_j\}$ виграш I-ого гравця складає a_{ij} , а II-ого — b_{ij} , при цьому, взагалі кажучи $a_{ij} \neq b_{ij}$. Тоді отримуються дві платіжні $m \times n$ матриці:

$$A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}; B = \{b_{ij}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (4.1)$$

де A - платіжна матриця I-ого гравця, B - II-ого.

У цьому випадку говорять, що вивчається **двоматрична або біматрична гра** двох гравців з платіжними матрицями (4.1).

У випадку $b_{ij} = -a_{ij}$ отримується звичайна матрична гра.

Існують два різновиди біматричних ігор: некооперативні (безкоаліційні) ігри, які забороняють будь-яке співробітництво сторін, і кооперативні ігри, які допускають співробітництво. Очевидно, що кооперативні ігри є більш складним об'єктом хоча б тому, що форми кооперації можуть бути різноманітними, а тому їх вивченню має передувати дослідження некооперативних ігор.

1.1 Будемо вважати повний набір імовірностей $x = (x_1, \dots, x_m)$ використання I-им гравцем своїх чистих стратегій при реалізації змішаної стратегії, а $y = (y_1, \dots, y_n)$ - змішаної стратегії - II-ого гравця..

Тоді середні виграші I-ого і II-ого гравців відповідно рівні:

$$H_1(A, x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \quad (4.2)$$

$$H_2(B, x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i y_j.$$

Означення. Пара векторів $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ визначають рівноважну ситуацію (ситуацію рівноваги по Нешу), якщо для довільних x і y , що задовольняють умови

$$\sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{j=1}^n y_j = 1, y_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \quad (4.3)$$

виконуються нерівності:

$$H_1(A, x, y^0) \leq H_1(A, x^0, y^0), H_2(B, x^0, y) \leq H_2(B, x^0, y^0).$$

Ці нерівності означають, що коли гравець відхилиться від рівноважної ситуації (x^0, y^0) , то його виграш може тільки зменшитися.

На питання про існування ситуації рівноваги відповідає наступна

Теорема 4.1. (Дж. Неш). Люба біметрична гра має хоча б одну рівноважну ситуацію (точку рівноваги) у змішаних стратегіях.

Можна довести, що вектори x^0, y^0 задовольняють систему нерівностей

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \leq H_1(A, x, y), \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.4)$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} x_i \leq H_2(B, x, y), \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.5)$$

а їх компоненти – умови (4.3).

1.2⁰. Очевидно, що знаходження всіх ситуацій рівноваги, тобто розв'язків системи обмежень (4.3)–(4.5), для довільних біметричних ігор, є складним і громіздким процесом.

Тому розглянемо біметричну гру порядку 2x2 з матрицями

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Змішані стратегії для I-го і II-го гравців мають вид:

$$(x, 1-x), \quad (y, 1-y), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

а середні виграші згідно з (4.2), (4.6):

$$\begin{aligned} H_1(A, x, y) &= a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}(1-x)y + a_{22}(1-x)(1-y) = \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x + (a_{21} - a_{22})y + a_{22}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(B, x, y) &= b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}(1-x)y + b_{22}(1-x)(1-y) = \\ &= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy + (b_{12} - b_{22})x + (b_{21} - b_{22})y + b_{22}. \end{aligned}$$

Умови ситуацій рівноваги (4.4), (4.5) мають такий вид:

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \leq H_1(A, x, y), \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \leq H_1(A, x, y), \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \leq H_2(B, x, y), \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \leq H_2(B, x, y). \end{cases} \quad (4.8)$$

Виконавши прості алгебраїчні перетворення в (4.7), отримаємо (з урахуванням (4.2)):

$$\begin{cases} (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})(1-x)y + (a_{12} - a_{22})(1-x) \leq 0, \\ (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy + (a_{12} - a_{22})x \geq 0. \end{cases}$$

Для спрощення запису в останніх нерівностях покладемо

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}, \quad a_2 = a_{22} - a_{12}, \quad (4.9)$$

тоді нерівності (4.7) наберуть такого виду:

$$\begin{cases} (a_1 y - a_2)(1-x) \leq 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} (a_1 y - a_2)x \geq 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Отже, множина всіх прийнятних стратегій для І-го гравця задовольняє умови (4.10), (4.11), де $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Для знаходження x розглянемо три випадки.

- 1) Якщо $x=0$, тоді (4.11) виконується для любого y , а (4.10) набере такого виду:

$$a_1 y - a_2 \leq 0. \quad (4.12)$$

- 2) Якщо $x=1$, тоді (4.10) виконується для любого y , а (4.11) має вид:

$$a_1 y - a_2 \geq 0. \quad (4.13)$$

- 3) Якщо $0 \leq x \leq 1$, тоді (4.10) розділимо на $1-x$, а (4.11) – на x і отримаємо

$$a_1 y - a_2 \leq 0, \quad a_1 y - a_2 \geq 0,$$

звідки

$$a_1 y - a_2 = 0. \quad (4.14)$$

Отже, множина **К** розв'язків системи (4.10), (4.11) складається з:

- 1) всіх ситуацій виду $(0, y)$, де

$$a_1 y - a_2 \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

- 2) всіх ситуацій виду (x, y) , де

$$a_1 y - a_2 = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$$

- 3) всіх ситуацій виду $(1, y)$, де

$$a_1 y - a_2 \geq 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Якщо $a_1 = a_2 = 0$, то розв'язком є $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$, оскільки всі співвідношення (4.12) – (4.14) виконуються за таких x та y .

Якщо $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, то тоді виконуються або (4.11), або (4.12), і тому розв'язком є або $x = 0$, або $x = 1$ при $0 \leq y \leq 1$.

Якщо $a_1 > 0$, то з (4.12) отримується розв'язок

$$x = 0, \quad y \leq \frac{a_2}{a_1} = \alpha,$$

із (4.12) впливає ще розв'язок $x = 1$, $y \geq \alpha$, а з (4.13) отримується ще розв'язок

$$0 < x < 1, \quad y = \alpha.$$

Якщо ж $a_1 < 0$, то розв'язки такі:

$$x = 0, y \geq \alpha; \quad x = 1, y \leq \alpha; \quad 0 < x < 1, y = \alpha;$$

при цьому слід враховувати те, що $y \in [0;1]$.

Для II-го гравця дослідження аналогічні. Якщо ввести позначення

$$b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = b_1, \quad b_{22} - b_{21} = b_2, \quad (4.15)$$

тоді система (4.8) набере такого виду

$$\begin{cases} (b_1 x - b_2)(1 - y) \leq 0, \\ (b_1 x - b_2)y \geq 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

а множина L прийнятних для II-го гравця ситуацій складається з:

- 1) всіх ситуацій виду $(x, 0)$, де $b_1 x - b_2 < 0$, $0 \leq x \leq 1$;
- 2) всіх ситуацій виду (x, y) , де $b_1 x - b_2 = 0$, $0 \leq x \leq 1$, $0 < y < 1$;
- 3) всіх ситуацій виду $(x, 1)$, де $b_1 y - b_2 > 0$, $0 \leq x \leq 1$.

Результати наступні:

- якщо $b_1 = b_2 = 0$, то розв'язок є $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$;
- якщо $b_1 = 0$, $b_2 \neq 0$, то розв'язок або $y = 0$, або $y = 1$ при $0 \leq x \leq 1$;
- якщо $b_1 > 0$, то розв'язки наступні:

$$y = 0, x < \frac{b_2}{b_1} = \beta; \quad y = 1, x > \beta; \quad 0 < y < 1, x = \beta;$$

– якщо $b_1 < 0$, то розв'язки такі:

$$y = 0, x > \beta; \quad y = 1, x < \beta; \quad 0 < y < 1, x = \beta.$$

При цьому слід враховувати, що $x \in [0;1]$.

Розв'язком гри є перетин множин $\mathbf{K}$ і $\mathbf{L}$, тобто ті значення x^0 і y^0 , які є спільними для множин $\mathbf{K}$ і $\mathbf{L}$. Середні виграші при цьому визначаються за формулами (4.2), в які слід підставити отримане рішення (x^0, y^0) . Очевидно, що α входить у змішану стратегію II-го гравця, хоча залежить тільки від виграшів I-го гравця; β входить у змішану стратегію I-го гравця, хоча залежить тільки від виграшів II-го гравця. Порівняння цих результатів з результатами розв'язків матричних ігор з нульовою сумою показує, що α співпадає з оптимальною стратегією I-го гравця в матричній грі з матрицею $\mathbf{A}$, а β – з оптимальною стратегією II-го гравця в матричній грі з матрицею $\mathbf{B}$. Звідси можна зробити висновок, що рівноважна ситуація спрямовує поведінку у гравців не стільки на максимізацію свого виграшу, скільки на мінімізацію виграшу суперника.

З другого боку, природно також розглядати прийнятною поведінку гравців у скінченних безкоаліційних іграх, спрямовану на максимізацію свого виграшу з урахуванням максимальної протидії іншого гравця, тобто придатною стратегією I-го гравця вважати оптимальну змішану стратегію I-го гравця в матричній грі з матрицею $\mathbf{A}$, а придатною стратегією II-го гравця в матричній грі з матрицею $\mathbf{B}$, якщо в ній розглядати розв'язок з позицій максимізації виграшу II-го гравця, тобто розв'язувати її як для I-го гравця з матрицею $\mathbf{B}'$, де штрих означає операцію транспонування матриці.

1.3⁰. Задача про будівництво об'єктів. Корпорація хоче побудувати один із двох об'єктів на території міста. Міська влада може погодитися на пропозицію корпорації або відмовити. Корпорація – I-ий гравець – має дві стратегії: A_1 – будувати 1-ий об'єкт; A_2 – будувати 2-ий об'єкт. Місто – II-ий гравець – також має дві стратегії: прийняти пропозицію корпорації або відмовити. Свої дії (стратегії) гравці використовують незалежно один від другого, і результати визначаються прибутком (виграшем) згідно з такими матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Деякі пояснення стосовно елементів виграшів матриць $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ можуть бути, наприклад, такими: якщо гравці використовують свої перші стратегії A_1 (корпорація вирішує будувати 1-й об'єкт), B_1 (міська влада дозволяє

будівництво), тоді місто отримує виграш 5 млн. грн., а корпорація втрачає 10 млн. грн. Аналогічно пояснюються решта елементів матриць.

Для цієї гри за формулами (4.9) обчислюємо

$$a_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = -14, \quad a_2 = a_{22} - a_{12} = -3, \quad \alpha = \frac{3}{14},$$

з урахуванням чого система нерівностей (4.10), (4.11) має такий вид:

$$\begin{cases} (-14y + 3)(1 - x) \leq 0, \\ (-14y + 3)x \geq 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

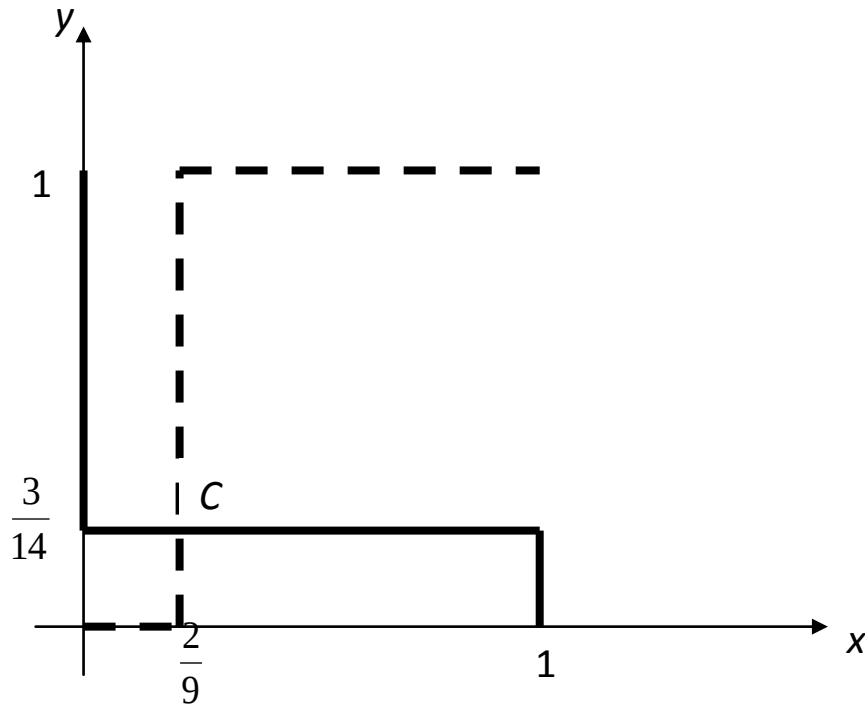
Розглянемо три випадки.

- 1) Якщо $x=0$, тоді друга нерівність (4.17) виконується, а перша справджується, якщо $-14y + 3 \leq 0$, тобто для $y \in \left[\frac{3}{14}; 1\right]$ (враховується нерівність $y \leq 1$).
- 2) Якщо $x \in (0, 1)$, тоді обидві нерівності (4.17) виконується тільки у випадку $y = \frac{3}{14}$.
- 3) Якщо ж $x=1$, тоді перша нерівність виконується, а друга справджується при виконанні нерівності $-14y + 3 \geq 0$, або $y \in \left[0, \frac{3}{14}\right]$ (слід враховувати, що $y \geq 0$).

Отже, множина рішень **K** має такий вид:

$$\begin{cases} (0, y), & \text{де } \frac{3}{14} \leq y \leq 1, \\ \left(x, \frac{3}{14}\right) & \text{де } 0 < x < 1, \\ (1, y) & \text{де } 0 \leq y \leq \frac{3}{14}. \end{cases}$$

Зобразимо її на мал. 4.1 жирною лінією



Мал. 4.1

Для II-го гравця за формулами (4.15) обчислимо

$$b_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 9, \quad b_2 = b_{22} - b_{21} = 2, \quad \beta = \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{9}.$$

Тоді система (4.16) має такий вид:

$$\begin{cases} (9x - 2)(1 - y) \leq 0, \\ (9x - 2)y \geq 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

Розглянувши три випадки (за аналогією дослідження системи (4.17)), отримаємо множину рішень **L** системи нерівностей (4.18):

$$\begin{cases} (x, 0), & \text{де } 0 \leq x \leq \frac{2}{9}, \\ \left(\frac{2}{9}, y\right) & \text{де } 0 < x < 1, \\ (x, 1) & \text{де } \frac{2}{9} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Множину **L** ситуацій, прийнятних для II-го гравця, зображено на мал. 4.1 пунктирною лінією.

Точка перетину множин **L** і **K** – точка **C** з координатами $x = \frac{2}{9}, y = \frac{3}{14}$ і є відповідними прийнятними оптимальними стратегіями корпорації і міста. Отже, отримано оптимальні змішані стратегії $x^0 = \left(\frac{2}{9}; \frac{7}{9}\right), y^0 = \left(\frac{3}{14}; \frac{11}{14}\right)$, яким відповідають оптимальні (середні) виграші відповідно:

$$H_1(A, x, y) = -10 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} + 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} + 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} - 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = -\frac{72}{126} = -\frac{4}{7};$$

$$H_2(B, x, y) = 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{14} - 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{11}{14} - 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{14} + 1 \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = \frac{1}{3}.$$

Доцільно відмітити, що коли розв'язувати цю гру як матричні ігри двох гравців з нульовою сумою, то для гри з матрицею **A** оптимальні змішані стратегії для I-го гравця і ціна гри отримується як розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} -10x^{(1)} + 1 \cdot (1 - x^{(1)}) = v_1, \\ 2x^{(1)} - (1 - x^{(1)}) = v_1, \end{cases}$$

звідки $x^{(1)} = \frac{1}{7}, v_1 = -\frac{4}{7}$, тобто ціна гри для I-го гравця співпадає з H_1 . Відмітимо, що записані рівняння отримуються з (2.7) з урахуванням теореми 4.

Розглянемо тепер задачу про знаходження оптимальної змішаної стратегії II-го гравця з позиції максимізації його виграшу, тобто будемо розв'язувати її як для I-го гравця з матрицею **B'**. Тоді згідно з (2.7)

$$\begin{cases} 5y^{(1)} - 2 \cdot (1 - y^{(1)}) = v_2, \\ -y^{(1)} + 1 - y^{(1)} = v_2, \end{cases}$$

звідки $y^{(1)} = \frac{1}{3}, v_2 = \frac{1}{3}$, тобто v_2 співпадає з H_2 .

Висновок: Якщо кожний із гравців буде здійснювати свої стратегії в цій грі, виходячи тільки із матриць своїх виграшів, то їх оптимальні середні виграші співпадають з їх виграшами при ситуації рівноваги.

1.4. Задача про квоти нафтовидобувних країн. Розглянемо дві нафтовидобувні країни. Вони можуть кооперуватися (К), домовлятися про об'єми щоденного добування нафти, обмежуючись, наприклад, 2 млн. барелів нафти в день для кожної країни. З другого боку, країни можуть діяти некооперативно (Н), добуваючи, скажімо по 4 млн. барелів в день. Матриці прибутків

$$A = \begin{matrix} & K & H \\ \begin{matrix} K \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 46 & 26 \\ 52 & 32 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & K & H \\ \begin{matrix} K \\ H \end{matrix} & \begin{pmatrix} 42 & 44 \\ 22 & 24 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

відповідають першій та другій країні, де I-й рядок і I-й стовпець відповідає варіанту кооперування, а II-й рядок і II-й стовпець вказує на варіант некооперативних дій.

Потрібно знайти розв'язок цієї двоматричної гри.

Зауваження. Аналіз матриць свідчить про картину, доволі типову для картеля, коли у кожного із членів картеля присутній стимул відхилитися від домовленостей, щоб за рахунок збільшення обсягів виробництва отримати додатковий прибуток.

За формулами (4.9) обчислимо

$$a_1 = 46 - 26 - 52 + 32 = 0, \quad a_2 = 32 - 26 = 6,$$

тоді система (4.10), (4.11) набере такого виду:

$$\begin{cases} -6(1-x) \leq 0, \\ -6x \geq 0, \end{cases}$$

Звідки множина K: $0 \leq x \leq 1, \quad x = 0.$

Згідно з (4.15)

$$b_1 = 42 - 44 - 22 + 24 = 0, \quad b_2 = 24 - 22 = 2,$$

з урахуванням чого система (4.16):

$$\begin{cases} -2(1-y) \leq 0, \\ -2y \geq 0, \end{cases}$$

що дає множину L: $0 \leq x \leq 1, \quad y = 0.$

Перетин множин K та L визначає розв'язок гри: $K \cap L = (0;0)$. Це означає, що кожен із гравців (країн) повинен обрати другу стратегію H, тобто не кооперуватися, обравши чисті стратегії.

В результаті країни отримують прибуток 32 і 24 млн. доларів відповідно, що суттєво менше ніж у випадку кооперативної поведінки.

Отримана ситуація зумовлюється тим, що у кожного гравця є домінуюча стратегія (матрицю B слід транспонувати!).

Зауважимо, що феномен, з яким зустрілися в розглянутому прикладі, аналогічний загальновідомій «Дилемі ув'язненого», суть якої полягає в наступному.

Дві особи, які підозріваються у здійсненні важкого злочину, заарештовані і утримуються в одиночних камерах таким чином, що не можуть передавати один одному будь-які повідомлення. Їх допитують по одному. Якщо обоє признаються у здійсненні злочину, то їм загрожує, з урахуванням зізнання, тюремне ув'язнення терміном по 6 років кожному. Якщо обидва будуть мовчати (не зізнаватися), то вони будуть покарані за здійснення якогось незначного злочину і отримають у цьому випадку по одному року тюремного ув'язнення. Якщо ж один із них зізнається, а інший – ні, то перший, з урахуванням співпраці з слідством, буде взагалі звільнений від покарання, тоді як другий отримає максимально можливий за даний злочин вирок – 10 років тюремного ув'язнення.

Завдання для самостійної роботи:

- 1) описати двоматричну гру;
- 2) знайти розв'язок цієї гри та здійснити його аналіз.

1.5. Боротьба за ринки.

Невелика фірма А (І-й гравець) намагається збути партію товару на одному з двох ринків, монополізованих другою, більшою фірмою В (другий гравець). Для цього фірма А готова здійснити по одному з ринків відповідні приготування (наприклад, розгорнути рекламну кампанію). Фірма В може здійснити спротив цьому, здійснивши на одному з ринків попередні заходи. Якщо фірма А зустрічає протидію, то отримує поразку, в протилежному випадку – захоплює ринок.

Будемо вважати, що проникнення фірми А на перший ринок більш вигідне, ніж на другий, але й поразка на першому ринку принесе фірмі А більші втрати (збитки), ніж на другому ринку.

Отже, фірми мають по дві стратегії:

A_1 і B_1 – вибір першого ринку;

A_2 і B_2 – вибір другого ринку.

Покладемо, що платіжні матриці гравців мають такий вид:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Аналіз елементів обох матриць вказує на те, що коли обидві фірми виберуть один ринок, то виграє фірма В, якщо різні – то фірма А (слід розрізняти позначення фірм і відповідних матриць гри).

Знайдемо розв’язок даної біматричної гри.

$$a_1 = -15, a_2 = -5$$

Обчисливши за формулами (4.9) отримаємо систему нерівностей

$$\begin{cases} (-15y + 5)(1 - x) \leq 0, \\ (-15y + 5)x \geq 0, \end{cases}$$

яка рівносильна системі

$$\begin{cases} (-3y + 1)(1 - x) \leq 0, \\ (-3y + 1)x \geq 0. \end{cases}$$

Множина рішень К має такий вид:

$$\begin{cases} (0, y), & \text{де } y \in \left[\frac{1}{3}; 1\right], \\ \left(x, \frac{1}{3}\right) & \text{де } x \in (0; 1), \\ (1, y) & \text{де } y \in \left[0; \frac{1}{3}\right]. \end{cases}$$

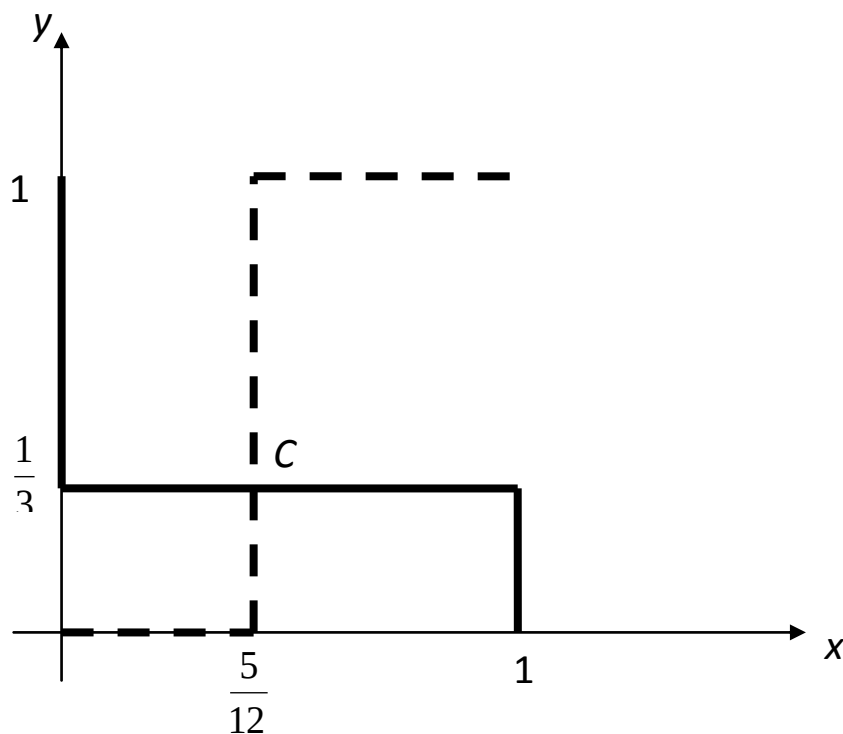
Для II-го гравця за формулами (4.15) знайдемо $b_1=12$, $b_2=5$ і отримаємо систему виду (4.16):

$$\begin{cases} (12x - 5)(1 - y) \leq 0, \\ (12x - 5)y \geq 0, \end{cases}$$

яка визначає множину рішень **L**:

$$\begin{cases} (x,0), & \text{де } x \in \left[0; \frac{5}{12}\right], \\ \left(\frac{5}{12}, y\right) & \text{де } y \in (0;1), \\ (x,1) & \text{де } x \in \left[\frac{5}{12}; 1\right], \end{cases}$$

Множину К зобразимо на мал. 4.2 жирною лінією, а множину L – пунктирною. Точка перетину множин К та L визначає точку С з координатами $\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}\right)$, яка є точкою рівноваги.



Мал. 4.2

Це дає нам наступні оптимальні змішані стратегії гравців: $x^0 = \left(\frac{5}{12}, \frac{7}{12}\right)$,

$y^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, яким відповідають оптимальні (середні) виграші

$$H_1(A, x^0, y^0) = -\frac{2}{3}; \quad H_2(B, x^0, y^0) = \frac{4}{3}.$$

Отже, якщо гра може бути повторена багаторазово в однакових умовах, то фірма А в 41,66 % (відповідає $\frac{5}{12}$) випадків повинна здійснювати спроби проникнення на перший ринок, а в 58,33 % – на другий ринок. При цьому (в середньому) вона не програє більше ніж $\frac{2}{3}$ (умовних одиниць). Фірмі В рекомендується в 33,33 % здійснювати протидію на першому ринку, а в 66,66 % – на другому. У цьому випадку її середній виграш складе не менше $\frac{4}{3}$ (у. о.).

1.6. У розглянутих вище прикладах була тільки одна точка рівноваги. Однак, виявляється, існують біматричні ігри, в яких точки рівноваги неєдині. Ілюстрацією є наступна задача, яка визначається матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Самостійно довести, що для даної гри є три точки рівноваги, серед яких є чисті та змішані стратегії. Здійснити аналіз отриманих результатів і мотивувати вибір кращої з них.

В цьому прикладі реалізується доволі рідкісна для матричних ігор ситуація, коли функції виграшів гравців досягають максимуму одночасно.

2. В п.1 розглядалися ігри, в яких гравці не мали права здійснювати угоди, утворювати коаліції. Розглянемо тепер так звані кооперативні ігри, в яких гравці можуть утворювати коаліції. Такі ситуації можуть виникати особливо часто, якщо розглядаються ігри n гравців. Слід зауважити, що при змістовному аналізі процедур сумісного прийняття рішень в таких кооперативних іграх необхідна додаткова інформація про можливі дії коаліцій, способів обміну інформацією про прийняті рішення тощо. Розглянемо принципи прийняття рішень на прикладі біматричних ігор.

Вище відмічалось, що рівновага є важливим принципом в безкоаліційних іграх, в яких не розглядається утворення коаліцій. Коаліція є формою кооперації, спрямованою на збільшення персональних можливостей гравців, тобто на збільшення їх виграшів. У матричній грі кооперація гравців позбавлена сенсу, оскільки в такій грі покращення одного з них призводить до погіршення положення іншого. Ситуація змінюється при переході від

матричної гри до біматричної, оскільки в біматричних іграх кооперація може покращити положення обох гравців. В біматричній грі є лише одна нетривіальна коаліція – коаліція обох гравців. Для пояснення відмінностей між індивідуальним вибором рішень обома гравцями і сумісним прийняттям рішення коаліцією цих гравців розглянемо наступний приклад.

2.1. Конкурс на реалізацію проекту.

Дві фірми беруть участь у конкурсі на реалізацію проекту, причому дохід від реалізації проекту складе 10 у.о. Кожна фірма може або подати просту заявку на участь в конкурсі (витрати рівні 1 у.о.), або представити програму реалізації проекту (затрати складуть 3 у.о.). За умовами конкурсу, якщо обидві фірми обирають однаковий спосіб подачі заявки, то замовлення (і прибуток) на реалізацію проекту ділиться між ними навпіл. Якщо ж фірми обирають різні способи дій, то перевага віддається фірмі, яка надасть програму. Потрібно розв'язати цю конфліктну ситуацію.

Розв'язування. Зобразимо описану конфліктну ситуацію у вигляді біматричної гри. Гравцями А та В тут виступають фірми, стратегія A_1 (B_1) – подача заявки на участь в конкурсі першої (другої) фірми, стратегія A_2 (B_2) – представлення програми дій першою (другою) фірмою.

Кількісно виграші гравців можна зобразити наступним чином:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши цю гру, знайдемо єдину рівноважну ситуацію $x=y=0$, або $\{A_2, B_2\}$ з $H_1(A, 0, 0) = H_2(B, 0, 0) = 2$. Для цього обидві фірми повинні надати програму дій і поділити навпіл прибуток від реалізації проекту.

Жодному з цих гравців не вигідно відхилятися від цієї стратегії, оскільки це може тільки зменшити його виграш. Але якщо гравці одночасно відхиляються від оптимальної (рівноважної по Нешу) стратегії, то виникає

ситуація $\{A_1, B_1\}$, яка очевидно є більш вигідною для обох із них з вигрaшем $H_1(A,1,1) = H_2(B,1,1) = 4$. Однак перехід до цієї ситуації можливий тільки як результат домовленості між гравцями, що можливо лише при створенні коаліції цих гравців. Об'єднання гравців в коаліцію вимагає як мінімум можливості обміну інформацією між ними. Якщо ж гравці не можуть обмінюватися інформацією, то кожний із них буде побоюватися змінювати обрану ним чисту стратегію A_2 (B_2) на стратегію A_1 (B_1), оскільки це приводить до зменшення вигрaшу гравця, що відхилився від обраної стратегії.

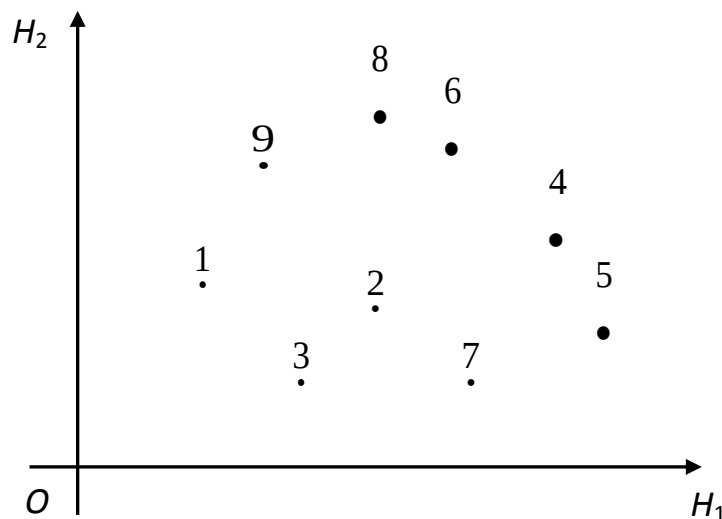
Розглянутий приклад демонструє важливу особливість біматричних ігор – можливість наявності суперечності між вигідністю і стійкістю (положенням рівноваги). Справді, ситуація $\{A_2, B_2\}$ є стійкою, але не вигідною, а ситуація $\{A_1, B_1\}$ – вигідною, але нестійкою. Тому якщо гравці заключають між собою угоду – обом дотримуватися стратегії $\{A_1, B_1\}$, то ця угода буде знаходитися під загрозою порушення, оскільки кожному гравцеві вигідне її одностороннє порушення.

2.2. При дослідженні кооперативного аспекту в теорії ігор увага звертається, як правило, не на ситуації гри, а на її наслідки. У відповідності з цим в основі оптимальності знаходиться ідея вигідності.

Проаналізуємо, як може реалізовуватися ідея вигідності в рамках неантагоністичної гри двох осіб. Нехай $\{A_i, \ i = \overline{1, m}\}$ – множина стратегій I-го гравця, а $\{B_j, \ j = \overline{1, n}\}$ – множина стратегій II-го гравця. Якщо гравці утворюють коаліцію, то вони можуть створювати будь-яку ситуацію $\{A_i, B_j\}$, і, таким чином, реалізовувати будь-який наслідок гри. Виникає питання: який наслідок гри слід вважати в цьому випадку найбільш вигідним для коаліції, тобто оптимальним для неї?

Так, у рамках попередньої задачі гравці, об'єднавшись в коаліцію, віддадуть перевагу ситуації $\{A_1, B_1\}$ у порівнянні з $\{A_2, B_2\}$, однак ситуації $\{A_1, B_2\}$ і $\{A_2, B_1\}$ також є «кандидатами» на оптимальність.

У загальному випадку для матричної гри розгляд питання про її оптимальність з точки зору коаліції зручно представити в геометричній формі. На координатній площині H_1OH_2 зобразимо точки, координатами яких є виграші гравців (a_{ij}, b_{ij}) для кожної можливої ситуації $\{A_i, B_j\}$. При цьому отримується «картинка», схожа на ту, що зображена на мал. 4.3.



Мал. 4.3.

Оскільки коаліція може обрати любий із представлених дев'яти наслідків, то фактично отримується задача двокритеріальної оптимізації, де I-й гравець намагається максимізувати критерій H_1 , а II-й – критерій H_2 . Аналіз такої двокритеріальної задачі можна здійснити в два етапи. На першому етапі здійснюється мажорювання (домінування) стратегій по Парето. Відкидаючи наслідки, доміновані по Парето, отримуємо множину Парето-оптимальних наслідків. У прикладі, зображеному на мал.4.3, Парето-оптимальними є наслідки $\{4, 5, 6, 8\}$. Вибір оптимального наслідка слід здійснювати з множини Парето-оптимальних наслідків. На другому етапі необхідно дати

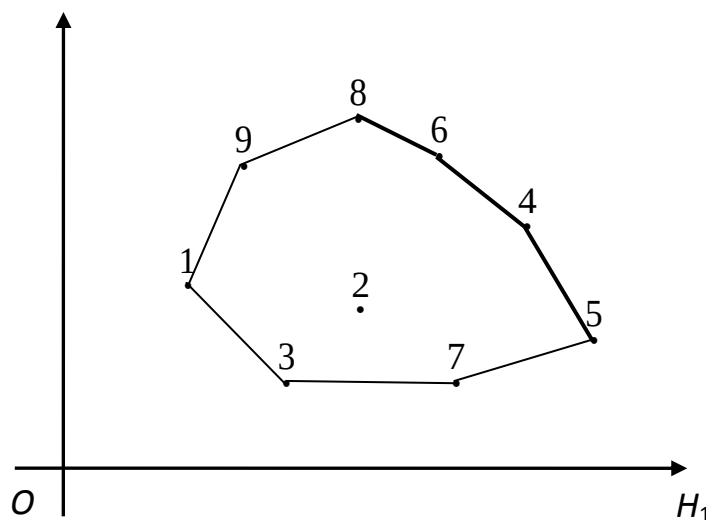
відповідь на питання – яке з Парето-оптимальних рішень слід вважати оптимальним.

На першому етапі гравці виступають як союзники, оскільки цей крок вигідний їм обом. Однак на другому етапі, при порівнянні любых двох Парето-оптимальних рішень, гравці із союзників перетворюються в супротивників: збільшення виграшу одного з них призводить до зменшення виграшу іншого.

Для розв'язування задачі знаходження оптимального підсумку в кооперативній грі здійснимо ще одне припущення: можливе використання не тільки чистих, але й змішаних стратегій. Це приводить до того, що разом із двома чистими наслідками (H_1, H_2) і (H'_1, H'_2) коаліція може реалізувати також наслідок:

$$\lambda(H_1, H_2) + (1 - \lambda)(H'_1, H'_2) = \{\lambda H_1 + (1 - \lambda)H'_1, \lambda H_2 + (1 - \lambda)H'_2\},$$

де $\lambda \in [0, 1]$. Геометрично це означає, що множина наслідків біматричної гри перетворюється в багатокутник D, вершинами якого будуть точки (a_{ij}, b_{ij}) . При цьому наслідки, оптимальні по Парето, утворюють «північно-східну» границю цього багатокутника, а саме – це ламана (8, 6, 4, 5) (мал. 4.4):



Мал. 4.4.

Задача знаходження кооперативного рішення біматричної гри зводиться тепер до побудови правила, яке для кожного такого багатокутника наслідків

вказує єдиний оптимальний наслідок, який належить його «північно-східній» границі.

Розглянемо розв’язування цієї задачі, яке відоме як арбітражний розв’язок Неша. Арбітражний розв’язок представляє собою деяку систему вимог (аксіом), з допомогою яких для будь-якої гри виділяється її єдиний розв’язок – оптимальний наслідок гри.

Нехай v_A і v_B - ціни матричних ігор з матрицями A та B відповідно. Тоді в явному вигляді арбітражний розв’язок Неша для пари (H_1, H_2) – це точка (H_1^*, H_2^*) , для якої добуток (функція корисності):

$$U = (H_1 - v_A)(H_2 - v_B) \quad (4.18)$$

досягає свого найбільшого значення в тій частині області D можливих наслідків біматричної гри, в якій виконуються умови:

$$H_1 \geq v_A, H_2 \geq v_B.$$

2.2. В якості ілюстрації розв’язування кооперативної гри розглянемо наступну задачу.

Оптимальний розподіл прибутку.

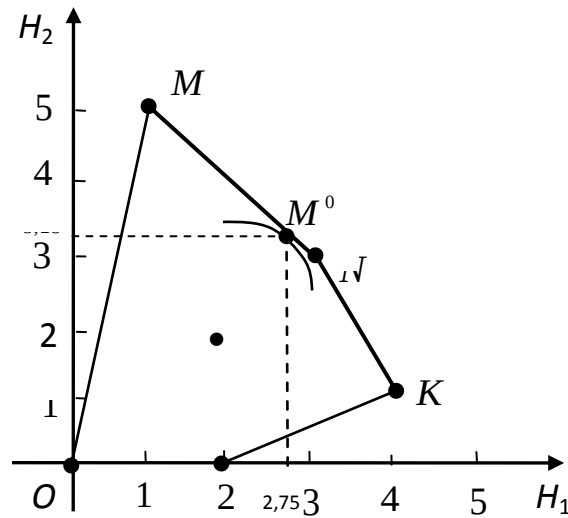
Є дві фірми: перша може виготовити один із двох виробів A_1 і A_2 , друга – один із трьох виробів B_1 , B_2 і B_3 . Якщо перша фірма виготовить продукцію A_i , $i = \overline{1,2}$, а друга – B_j , $j = \overline{1,3}$, то прибуток цих фірм, який залежить від того, чи є ці вироби взаємодоповнюючими або конкуруючими, визначається табл. 4.

Таблиця 4

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	(3;3)	(0;0)	(4;1)
A_2	(2;0)	(1;5)	(2;2)

Вважаючи, що фірми укладають між собою угоду, знайти справедливий розподіл прибутку, використовуючи арбітражне рішення Неша.

Розв'язування. Побудуємо в декартовій системі координат багатокутник D можливих наслідків гри, вершинами якого є всеможливі наслідки гри, наведені у таблиці:



Мал. 4.5.

Виділимо в цьому багатокутнику множину Парето-оптимальних рішень (північно-східну границю) MNK, відмічену жирними відрізками.

Обчислимо ціни гри для матричних ігор:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ і } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A стратегії, що визначаються першим і третім стовпцем, домінують над стратегією, визначеною другим стовпцем, а тому $v_A = 1$ (перевірте результат, скориставшись отриманою рівністю $\alpha_A = \beta_A = 1$). Для матриці B відсутня точка рівноваги в чистих стратегіях, а тому ціну гри v_B слід шукати з допомогою змішаних стратегій. Система обмежень (3.18) в нашому випадку має такий вид:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3 \leq v_B, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3 \leq v_B, \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Розділимо перші три обмеження на v_B і введемо нові позначення

$q_j = \frac{y_j}{v_B}, j = \overline{1,3}$. Розв'яжемо задачу лінійного програмування

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3q_1 + q_3 \leq 1, \\ 5q_1 + 2q_3 \leq 1, \\ q_j \geq 0, j = \overline{1,3}, \end{cases}$$

звівши її до канонічної форми

$$f = q_1 + q_2 + q_3 \quad (\max),$$

$$\begin{cases} 3q_1 + q_3 + q_4 = 1, \\ 5q_1 + 2q_3 + q_5 = 1, \\ q_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Реалізація симплексного методу визначається наступними таблицями:

№ табл.	№ рядка	Базисні невідомі	Опорний план	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	
I	0	f	0	-1	-1	-1↓	0	0	← · $\frac{1}{2}$
	1	q_4	1	3	0	1	1	0	
	2	← q_5	1	0	5	<u>2</u>	0	1	
II	0	f	$\frac{1}{2}$	-1↓	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	← · $\frac{1}{3}$ · (-1); · 1
	1	← q_4	$\frac{1}{2}$	<u>3</u>	$-\frac{5}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	
	2	q_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	
III	0	f	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	· 1
	1	q_1	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{5}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	
	2	q_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	

Згідно з табл. 3 $f_{\max} = \frac{2}{3}$, тоді ціна гри для матриці В: $v_B = \frac{1}{f_{\max}} = 1,5$.

Завдання для самостійної роботи: перевірити правильність отриманого результату, використавши графічний метод (див. п. 3.2).

Враховуючи, що $v_A = 1$, $v_B = 1,5$, функція (4.18) корисності по Нешу матиме такий вид: $U = (H_1 - 1)(H_2 - 1,5)$. Нам потрібно знайти серед точок, координати яких задовольняють нерівності $H_1 \geq 1, H_2 \geq 1,5$, таку, в якій функція U набиратиме максимальне значення. В цю множину точок згідно з мал. 4.5 потрапляє відрізок MN і частина відрізка NK . Розглянемо спочатку відрізок MN , рівняння якого (рівняння прямої, що проходить через дві задані точки) має такий вид:

$$\frac{y - y_M}{y_N - y_M} = \frac{x - x_M}{x_N - x_M}.$$

В нашому випадку отримаємо

$$\frac{H_2 - 5}{3 - 5} = \frac{H_1 - 1}{3 - 1} \quad \text{або} \quad H_2 + H_1 = 6.$$

Розглянемо наступну оптимізаційну задачу: знайти максимум цільової функції $U = (H_1 - 1)(H_2 - 1,5)$ при умові, що $H_2 + H_1 = 6$. Для цього побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(H_1, H_2, \lambda) = (H_1 - 1)(H_2 - 1,5) + \lambda(6 - H_1 - H_2).$$

Знайшовши частинні похідні першого порядку по H_1, H_2, λ і прирівнявши їх до нуля, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} H_2 - 1,5 - \lambda = 0, \\ H_1 - 1 - \lambda = 0, \\ 6 - H_1 - H_2 = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої має такий вид: $H_1^0 = 2,75; H_2^0 = 3,25$.

$$\text{Отже, } U(M^0) = U(2,75; 3,25) = (2,75 - 1)(3,25 - 1,5) = 3,0625.$$

Дослідимо тепер максимальне значення функції корисності U відносно точок відрізка NK , рівняння якого $2H_1 + H_2 = 9$. Для цього побудуємо функцію Лагранжа

$$L(H_1, H_2, \lambda) = (H_1 - 1)(H_2 - 1,5) + \lambda(9 - 2H_1 - H_2).$$

для якої отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} H_2 - 1,5 - \lambda = 0, \\ H_1 - 1 - 2\lambda = 0, \\ 9 - 2H_1 - H_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $H_1^* = \frac{16}{5}; H_2^* = \frac{13}{5}$, $U(M^*) = U(2,75; 3,25) = (\frac{16}{5} - 1)(\frac{13}{5} - 1,5) = 2,42$. Отже

$$U(M^0) > U(M^*).$$

Для визначення оптимальної змішаної стратегії в цій кооперативній грі, яка реалізує отриманий результат, потрібно «змішати» ситуації (3;3) і (1;5) в деякій пропорції так, щоб виконувалася рівність:

$$p \cdot (3;3) + (1-p) \cdot (1;5) = (2,75;3,25).$$

Розв'язавши останнє рівняння, отримаємо:

$$p = 0,875; \quad 1-p = 0,125.$$

Отже, для отримання «справедливої» частки фірми повинні відтворювати ситуацію (3;3) з частотою $\frac{7}{8}$, а ситуацію (5;1) з частотою $\frac{1}{8}$, а решту ситуацій не відтворювати зовсім. При цьому середній виграш першого гравця складе $\frac{7}{8} \cdot 3 + 1 \cdot \frac{1}{8} = 2,75$ (у.о.), а другого $\frac{7}{8} \cdot 3 + 5 \cdot \frac{1}{8} = 3,25$ (у.о.).

Лекція 7-8. Ігри з природою

1. Поняття та особливості гри з природою.
2. Прийняття рішень в умовах повної невизначеності.
 - 2.1. Критерій максимакса.
 - 2.2. Максимінний критерій Вальда.
 - 2.3. Критерій мінімального ризику Севіджа.
 - 2.4. Узагальнений критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.
 - 2.5. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з показниками песимізму $\lambda \in [0; 1]$.
3. Прийняття рішень в умовах ризику.
 - 3.1. Критерій Байєса відносно виграшів.
 - 3.2. Критерій Байєса відносно ризиків.
 - 3.3. Критерій Лапласа відносно виграшів.
 - 3.4. Критерій Байєса відносно значень імовірностей станів природи з урахуванням виграшів.
4. Про планування експерименту в іграх з природою.
5. Вибір рішень з допомогою дерева рішень.

1. Ситуації, розглянуті в попередніх темах, в економічній практиці можуть виявитися не цілком адекватними дійсності, оскільки реалізація моделей матричних ігор припускала можливість багаторазового повторення рішень (дій), які приймаються в схожих умовах. На практиці кількість економічних рішень, які приймаються при схожих умовах, жорстко обмежена. Часто економічна ситуація є унікальною, а рішення повинно прийматися одноразово і в умовах невизначеності.

Невизначеність була присутньою і в розглянутих вище антагоністичних іграх. Вона полягала в тому, що кожен з гравців не володів інформацією про дії суперника. Однак ця невизначеність в певній мірі компенсувалася припущенням про те, що гравці діють усвідомлено, обираючи стратегії, найбільш вигідні для себе і найменш вигідні для суперника.

Проте в економічній практиці в багатьох задачах прийняття рішень суттєво важливим елементом є невизначеність іншого виду. Ця невизначеність не пов'язана із свідомою цілеспрямованою протидією суперника і полягає в тому, що особа, яка приймає рішення, недостатньо інформована про об'єктивні зовнішні умови, при яких буде прийматися рішення. Невизначеність такого виду може породжуватися різними причинами: нестабільністю економічної ситуації, ринковою кон'юнктурою, курсами валют, рівнем інфляції, фіскальною політикою, коливанням купівельним попитом тощо. Тобто у задачах подібного роду вибір рішення залежить від станів об'єктивної дійсності, яка називається в моделі «природою», а математичні моделі подібних конфліктних ситуацій називається «грою з природою».

Таким чином, у грі з природою усвідомлено діє тільки один гравець, а саме особа, що приймає рішення. «Природа» є другим гравцем, але не суперником першого гравця, оскільки вона не діє усвідомлено проти першого гравця, набираючи той чи інший свій стан невизначеним чином, конкретних цілей у грі не переслідує і є байдужою до результату гри. Тому термін «природа» характеризує деяку об'єктивну реальність, яку не слід сприймати буквально, хоча іноді це дійсно характеризує стан природи.

Вивчення ігор з природою повинно також починатися з побудови платіжної матриці, є найбільш працездатним і відповідальним етапом при прийнятті рішень, оскільки помилки, допущені при формуванні платіжної матриці, не можуть бути компенсовані ніякими обчислювальними методами.

Нехай гравець A має m можливих стратегій A_i , $i = \overline{1, m}$, а природа Q може знаходитися в одному із n можливих станів Q_j , $j = \overline{1, n}$, які можна розглядати як її «стратегії». Тоді матрицю гри з природою можна представити у вигляді, аналогічному платіжній матриці матричної гри, як $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$, або

$$A = \left(\begin{array}{c|cccc} & Q_1 & Q_2 & \dots & Q_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right), \quad (5.1)$$

де a_{ij} – виграш гравця A при виборі ним стратегії A_i і при стані природи Q_j . Матриця гри з природою змістовно відрізняється від платіжної матриці антагоністичної матричної гри тим, що елементи стовпців матриці (5.1) не є програмами природи при відповідних її станах, тобто виграші a_{ij} платить не природа, а деяка “третя сторона”, або сукупність сторін, які впливають на прийняття рішень гравцем.

З одного боку, задача вибору гравцем A чистої або змішаної стратегії у грі з природою простіша, ніж у матричній грі, оскільки в цьому випадку з боку природи відсутня систематична протидія гравцю. З другого боку, ця задача ускладнюється наявністю невизначеності, пов’язаною з дефіцитом інформованості гравця про характер проявів станів природи.

У грі з природою також можна домінувати стратегії, що може дозволити зменшити вимірність платіжної матриці. Наприклад, у грі з матрицею 5×5 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

стратегія A_5 домінує стратегії A_1 і A_3 , тому їх можна “відкинути”. Тоді вимірність матриці гри буде рівна 3×5 :

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, і в іграх з природою можна і потрібно користуватися принципом домінування стратегій гравця A (рядків матриці гри). **Однак цей принцип не допустимий для другого гравця природи**, оскільки природа не намагається виграти, а діє неусвідомлено. Так, наприклад, в матриці $A^{(1)}$ перший, другий і третій стовпці (Q_1, Q_2, Q_3) домінують п’ятий стовпець (Q_5). Тому у матричній грі ці стовпці можна було б відкинути. Однак у грі з природою цього допустити не можна. Така обставина є ще однією властивістю, що відрізняє ігри з природою від матричних ігор.

При вирішенні питання про вибір можливої стратегії у грі з природою гравець A повинен керуватися матрицею виграшів. Однак ця матриця не завжди

адекватно відображає досліджувану ситуацію. На вибір стратегії повинні впливати не тільки виграші, що складають матрицю гри, але і показники “вдалості” і “невдалості” вибору даної стратегії при даному стані природи і сприятливості цього стану для збільшення виграшу.

Показником сприятливості стану Q_j природи Q називається найбільший виграш при цьому стані, тобто найбільший елемент j -го стовпця:

$$\max_i a_{ij}, j = \overline{1, n}. \quad (5.2)$$

І для характеристики ступеня вдалості використання гравцем стратегії A_i при стані природи Q_j вводять поняття “ризик”.

Ризиком r_{ij} гравця A при виборі ним стратегії A_i і при стані природи Q_j називається різниця між показником сприятливості β_j та виграшем a_{ij} :

$$= \beta_j - a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (5.3)$$

тобто ризик – різниця між виграшем, який гравець отримав би, якби він точно знав, що станом природи буде Q_j , і виграшем, який він отримає, не маючи такої інформації. Таким чином, ризик r_{ij} гравця A являє собою втрачену можливість максимального виграшу β_j (втрачену вигоду) при даному стані природи. Ця втрачена можливість згідно (5.3) визначається невіграною частиною максимального виграшу. Отже, величину ризику можна інтерпретувати як своєрідну плату за відсутність інформації про дійсний стан природи. Іншими словами, точна інформація про дійсний стан природи Q_j дозволяє гравцю обрати ту стратегію A_i , при якій його виграш буде максимальним (β_j).

Якщо ввести величину

$$w_j = \min_i a_{ij}, j = \overline{1, n}, \quad (5.4)$$

зміст якої – найменший виграш гравця A при стані природи Q_j , то можна встановити межі зміни ризиків:

$$0 \leq r_{ij} \leq \beta_j - w_j, \quad (5.5)$$

де різниця $\beta_j - w_j$ називається **коливанням виграшів** при стані природи Q_j .

Для даної матриці виграшів A матриця ризиків R_A має таку ж вимірність і наступний вид:

$$R_A = \{r_{ij}\}_{m \times n}. \quad (5.6)$$

Зауважимо, що матриця виграшів (5.1) однозначно визначає матрицю ризиків (5.6), оскільки кожний елемент r_{ij} цієї матриці однозначно визначається за формулами (5.3). Обернене твердження неправильне, бо одна і та ж матриця ризиків може відповідати різним матрицям виграшів.

Задача 5.1. Побудувати матрицю ризиків для такої матриці виграшів:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Розв'язування. Обчислимо показники сприятливості за формулами (5.2):

$$\beta_1 = 4, \beta_2 = 8, \beta_3 = 6, \beta_4 = 9.$$

Тоді у відповідності із формулами (5.3) матриця ризиків має такий вид:

$$R_A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Матриця ризиків з'ясовує деякі нюанси досліджуваної гри з природою. Наприклад, якщо гравець обирає стратегію A_2 , то при станах природи Q_1 і Q_4 він отримує однакові виграші $a_{21} = a_{24} = 3$. Однак ці виграші нерівноцінні в сенсі ризиків, оскільки вдалість вибору стратегії A_2 стосовно станів природи Q_1 і Q_4 різна. Показник сприятливості стану природи Q_1 для можливості збільшення виграшу дорівнює $\beta_1 = 4$, а для Q_4 - $\beta_4 = 9$. Тому ризики гравця A при виборі стратегії A_2 і при станах природи Q_1 і Q_4 рівні відповідно: $r_{21} = 1$, $r_{24} = 6$. Іншими словами, при стані природи Q_1 гравець міг би виграти по максимуму величину $\beta_1 = 4$, а виграв, дотримуючись стратегії A_2 , $a_{21} = 3$ од., „програвши” всього $r_{21} = 1$ од. А при стані природи Q_4 програв би $r_{24} = 6$ од. Таким чином, вибір стратегії A_2 по відношенню до стану Q_1 – більш вдалий, ніж по відношенню до стану природи Q_4 . Саме таку ситуації відображає матриця ризиків (5.8).

В цій задачі ми порівняли однакові виграші при одній і тій же стратегії гравця, але при різних станах природи. При цьому було показано, що ці результати можуть бути не рівноцінними в сенсі ризиків. Однакові ж виграші при різних стратегіях, але при одному і тому ж стані природи завжди рівноцінні. Наприклад, в матриці виграшів (5.7) однакові виграші $a_{13} = a_{23} = 5$ при стратегіях A_1 та A_2 і при стані природи Q_3 – рівноцінні, оскільки рівні відповідні ризики $r_{13} = r_{23} = 1$.

Для розв'язування гри з природою потрібно обрати таку чисту або змішану стратегію, яка була б найбільш вигідною в порівнянні із іншими. Зауважимо, що змішаної стратегії у гравця може і не бути, якщо дії гравця є альтернативними, тобто вибір однієї стратегії відхиляє всі інші стратегії, наприклад при виборі альтернативних проектів.

Методи прийняття рішень у грі з природою залежать від того, чи відомі або ні імовірності станів Q_j природи. Якщо ці імовірності невідомі, то має місце ситуація повної невизначеності, і це називається **прийняттям рішень в умовах повної невизначеності**, а якщо ці імовірності відомі апріорно, то мова ведеться про **прийняття рішень в умовах ризику**.

2. Розглянемо гру з природою, у якій імовірності станів природи Q_j невідомі і відсутня всяка можливість отримання про них будь-якої статистичної інформації. Тобто ми знаходимося у стані повної невизначеності, пов'язаної із відсутністю інформації про імовірності станів середовища (природи).

2.1. Критерій максимакса – це критерій крайнього оптимізму, максимізуючий максимальні виграші для кожного стану природи за формулою:

$$M = \max_i \max_j a_{ij}. \quad (5.9)$$

Для матриці (5.7) цей критерій дає $M = \max\{9, 8, 6\} = 9$, що відповідає стратегії A_1 .

Таким чином, максимаксний критерій є критерієм крайнього оптимізму, оскільки він орієнтує особу, що приймає рішення, на найкращий для нього стан природи. Разом з тим, ситуації, які вимагають використання критерію, в економіці і не такі уже і рідкісні.

2.2. При використанні максимінного критерію Вальда природа розглядається як агресивно налаштований і свідомо діючий супротивник, як у матричній грі. Тому обирається стратегія, що гарантує виграш не менший, ніж “нижня ціна гри з природою”:

$$W = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (5.10)$$

Для матриці (5.7) цей критерій дає

$$W = \max(1, 3, 2) = 3$$

що відповідає стратегії A_2 .

У відповідності з цим критерієм із всіх самих невдалих результатів обирається самий кращий. Це перестраховочна позиція **крайнього песимізму**, розрахована на гірший випадок. Така стратегія прийнятна, наприклад, коли гравець не стільки хоче виграти, скільки не хоче програти.

Обране таким чином рішення повністю виключає ризик. Це означає, що особа, яка приймає рішення, не може зіткнутися з більш гіршим результатом ніж той на який він орієнтується. Ця властивість дозволяє вважати критерій Вальда одним із фундаментальних. Тому в технічних і економічних задачах він використовується частіше всього як свідомо, так і не усвідомлено. Однак в практичних ситуаціях зайвий песимізм цього критерію може виявитися дуже не вигідним.

Використання цього критерію може бути виправданим, якщо ситуація, при якій обирається рішення, характеризується наступними обставинами:

- про ймовірність появи того або іншого стану природи нічого не відомо;
- з появою того або іншого стану необхідно рахуватися;
- не допускається ніякий ризик.

2.3. Критерій мінімального ризику Севіджа.

Цей критерій аналогічний критерію Вальда, тільки гравець у цій ситуації керується матрицею ризиків (5.6) і обирає стратегію, при якій досягається мінімально можливий із найбільших ризиків:

$$S = \min_i \max_j r_{ij}. \quad (5.11)$$

Для матриці (5.8) отримаємо

$$S = \min(4, 6, 7) = 4.$$

Тобто кращою стратегією за цим критерієм є стратегія A_1 .

Хоча критерії Севіджа і Вальда є критеріями крайнього песимізму, однак у загальному випадку вони не еквівалентні, тобто їх використання може приводити до вибору різних стратегій, в чому ми переконалися на наведених вище прикладах.

2.4. Узагальнений критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з коефіцієнтами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Переставимо виграші $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ для кожної стратегії A_i (тобто елементи кожного рядка матриці (5.1), розташували їх у неспадному порядку. Позначимо елементи отриманої матриці через b_{ij} , а саму матрицю як B :

$$B = \begin{pmatrix} j & 1 & 2 & \dots & n \\ B_1 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ B_2 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_m & b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } b_{i1} \leq b_{i2} \leq \dots \leq b_{in}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.13)$$

Наприклад, матриця (5.7) набуде такого виду:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}. \quad (5.12^*)$$

Згідно з нерівностями (5.13) в першому стовпці матриці B розташовані мінімальні виграші $b_{i1} = \min_j b_{ij}$, а в останньому – максимальні: $b_{in} = \max_j b_{ij}$.

Введемо невід'ємні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які задовольняють умову $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$.

Тоді показником ефективної стратегії A_i за даним критерієм буде число:

$$G_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5.14)$$

а оптимальною стратегією A_{i_0} буде та, для якої досягається максимум (5.14):

$$G_{i_0}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = G(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \max_i G_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (5.15)$$

$$\text{Числа } \lambda_p \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \lambda_j \quad \text{і} \quad \lambda_p \sum_{j=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^n \lambda_j,$$

де $\left[\frac{n}{2}\right]$ – ціла частина числа $\frac{n}{2}$, називаються відповідно **показниками песимізму і оптимізму**. Тоді коефіцієнти $\lambda_j, j=\overline{1, n}$, можна обирати наступним чином: чим небезпечніша ситуація, тим більшим є бажання підстрахуватися, і тим ближче до одиниці повинен бути коефіцієнт песимізму λ_p . У більш безпечній ситуації ближчим до одиниці повинен бути коефіцієнт оптимізму λ_o .

Таким чином, в даному критерії коефіцієнти λ_p і λ_o виражають кількісну міру відповідно песимізму і оптимізму гравця A , що обирає коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Якщо $\lambda_o > 0,5$, а $\lambda_p < 0,5$, то критерій – більш «оптимістичний», ніж «песимістичний». Якщо $\lambda_o < 0,5$, а $\lambda_p > 0,5$ – більш «песимістичний», ніж «оптимістичний». А якщо $\lambda_o = \lambda_p = 0,5$ – то «реалістичний».

Розглянемо тепер питання про формалізацію методу вибору коефіцієнтів в узагальненому критерії Гурвіца відносно виграшів. З цією метою визначимо:

а) суму виграшів по стовпцях матриці B :

$$\overline{b}_j = \sum_{i=1}^m b_{ij}, \quad j = \overline{1, n};$$

б) середнє значення виграшів b_{ij} розташованих в j -му стовпці:

$$\overline{b}_j = \frac{1}{m} b_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_{ij};$$

в) загальну суму всіх можливих виграшів гравця A :

$$b = \sum_{i=1}^m b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij}.$$

З урахуванням властивостей матриці B отримаємо умови:

$$b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

або

$$\overline{b}_1 \leq \overline{b}_2 \leq \dots \leq \overline{b}_n.$$

Тому у випадку вибору гравцем більш песимістичної стратегії ($\lambda_p > \lambda_o$) можна запропонувати обрати коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ обернено пропорціональними середнім виграшам:

$\lambda_1: \lambda_2: \dots: \lambda_n = \overline{b}_n: \overline{b}_{n-1}: \dots: \overline{b}_1$, що приводить до наступних формул для обчислення λ_j :

$$\lambda_j = \frac{b_{n-j+1}}{b}, j = \overline{1, n}. \quad (5.16)$$

Якщо ж гравець схильний до оптимізму і вважає ситуацію доволі безпечною, то можна запропонувати обирати коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ наступним чином:

$$\lambda_1: \lambda_2: \dots: \lambda_n = \overline{b}_1: \overline{b}_2: \dots: \overline{b}_n,$$

або

$$\lambda_j = \frac{b_j}{b}, j = \overline{1, n}. \quad (5.17)$$

У випадку реалістичного підходу запропонувати і $\lambda_j = \frac{1}{n}$.

Зауважимо, що для використання формул (5.16) і (5.17) необхідно, щоб всі b_j повинні бути або додатними, або від'ємними.

Задача 5.2. Знайти оптимальну стратегію у грі з природою, визначеною матрицею (5.7) за узагальненим критерієм Гурвіца.

Розв'язування. Обчислимо:

$$b_1 = 6, b_2 = 11, b_3 = 16, b_4 = 23, b = 56,$$

врахувавши, що здійснено перехід від матриці (5.7) до матриці (5.12*).

Тоді якщо гравець дотримується песимістичної стратегії, то

$$\lambda_1 = \frac{23}{56}, \lambda_2 = \frac{16}{56}, \lambda_3 = \frac{11}{56}, \lambda_4 = \frac{6}{56}$$

і

$$\lambda_p = \frac{39}{56} > \lambda_o = \frac{17}{56}.$$

Обчислимо показники ефективності стратегій $A_i, i = \overline{1, m}$ за формулами (5.14):

$$G_1 = \frac{23}{56} \cdot 1 + \frac{16}{56} \cdot 4 + \frac{11}{56} \cdot 5 + \frac{6}{56} \cdot 9 = \frac{196}{56},$$

$$G_2 = \frac{23}{56} \cdot 3 + \frac{16}{56} \cdot 3 + \frac{11}{56} \cdot 5 + \frac{6}{56} \cdot 8 = \frac{220}{56},$$

$$G_3 = \frac{23}{56} \cdot 2 + \frac{16}{56} \cdot 4 + \frac{11}{56} \cdot 6 + \frac{6}{56} \cdot 6 = \frac{212}{56},$$

Отже, оптимальною у цьому випадку є стратегія A_2 , оскільки

$$\max_{i=1,3} G_i = \max \left\{ \frac{196}{56}, \frac{220}{56}, \frac{212}{56} \right\} = \frac{220}{56} = G_2.$$

Якщо гравець дотримується більш оптимістичної стратегії, то згідно з формулами (5.17) отримаємо:

$$\lambda_1 = \frac{6}{56}, \lambda_2 = \frac{11}{56}, \lambda_3 = \frac{16}{56}, \lambda_4 = \frac{23}{56}$$

і

$$\lambda_o = \frac{39}{56} > \lambda_p = \frac{17}{56}.$$

Тоді показники ефективності будуть рівні:

$$G_1 = \frac{6}{56} \cdot 1 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 9 = \frac{337}{56},$$

$$G_2 = \frac{6}{56} \cdot 3 + \frac{11}{56} \cdot 3 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 8 = \frac{315}{56},$$

$$G_3 = \frac{6}{56} \cdot 2 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 6 + \frac{23}{56} \cdot 6 = \frac{290}{56},$$

і оптимальною буде стратегія A_1 , оскільки

$$\max_{i=1,3} G_i = \max \left\{ \frac{337}{56}, \frac{315}{56}, \frac{290}{56} \right\} = \frac{337}{56} = G_1.$$

Якщо ж гравець дотримується реалістичної стратегії, то

$$G_1 = \frac{1}{4} (1 + 4 + 5 + 9) = \frac{19}{4}, G_2 = \frac{1}{4} (3 + 3 + 5 + 8) = \frac{19}{4},$$

$$G_3 = \frac{1}{4} (2 + 4 + 6 + 6) = \frac{18}{4},$$

і гравець може обирати між стратегіями A_1 і A_2 .

Зауваження. Аналогічним чином можна розглянути і використання узагальненого критерія Гурвіца стосовно до матриці ризиків R_A .

2.5. Частинним випадком узагальненого критерія є **критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з показником песимізму $\lambda \in [0,1]$.**

Показником ефективності стратегії A_i за цим критерієм є величина:

$$G_i = \lambda \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \max_j a_{ij}, \quad (5.18)$$

а оптимальна стратегія A_{i_0} визначається з умови:

$$G_{i_0}(\lambda) = G(\lambda) = \max G_i(\lambda). \quad (5.19)$$

Цей критерій враховує як песимістичний, так і оптимістичний підходи до розв'язку гри. А саме, при $\lambda=0$ отримуємо критерій крайнього оптимізму, і розв'язок співпадає з критерієм мінімаса; при $\lambda=1$ отримуємо критерій крайнього песимізму і розв'язок співпадає із критерієм Вальда. Значення $\lambda \in (0,1)$ характеризує схильність гравця до ризику, а саме: чим ближче λ до 1, тим гравець менше схильний до ризику.

Задача 5.3. Розв'язати задачу 5.2. за критерієм (5.19).

Розв'язування. Припустимо, що $\lambda=0,5$. Тоді

$$\begin{aligned} G_1(\lambda) &= G_1(0,5) = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 9 = 5; \\ G_2(\lambda) &= G_2(0,5) = 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 8 = 5,5; \\ G_3(\lambda) &= G_3(0,5) = 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 6 = 4. \end{aligned}$$

Тоді згідно з (5.19) оптимальною є стратегія A_2 .

Критерій Гурвіца ставить до ситуації, в якій приймається рішення, наступні вимоги:

- про імовірність появи того чи іншого стану природи нічого не відомо;
- з появою того чи іншого стану необхідно рахуватися;
- реалізується лише мала кількість рішень;
- допускається деякий ризик.

Якщо за прийнятим критерієм рекомендується використання декількох стратегій, то вибір між ними здійснюється за додатковим критерієм, наприклад, можна порівнювати між собою середні квадратичні відхилення виграшів.

Припустимо, що один із розглянутих вище критеріїв рекомендує гравцю обрати стратегії A_1 або A_2 (як в задачі 5.2) при $\lambda_p=\lambda_0=0,5$. Тоді обчисливши середні квадратичні відхилення:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{1}{4}(1^2 + 4^2 + 5^2 + 9^2) - \left(\frac{1 + 4 + 5 + 9}{4}\right)^2 = 8,1875, \sigma_1 \approx 2,186; \\ \sigma_2^2 &= \frac{1}{4}(3^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2) - \left(\frac{3 + 3 + 5 + 8}{4}\right)^2 = 4,1875, \sigma_2 \approx 2,05; \end{aligned}$$

Можна рекомендувати вибрати із двох стратегій стратегію A_2 з меншим значенням середнього квадратичного відхилення.

Неможливо давати загальні рекомендації стосовно вибору того чи іншого критерію. Однак слід відмітити наступне: якщо в окремих ситуаціях недопустимим є навіть мінімальний ризик, то слід використовувати критерій Вальда; якщо певний ризик цілком прийнятний, то можна скористатись критерієм Севіджа. Можна також рекомендувати одночасно використовувати по чергово різні критерії. Після цього серед кількох варіантів, відображених таким чином, в якості оптимального доводиться вольовим рішенням виділяти деяке остаточне рішення.

Такий підхід дозволяє, по-перше, краще проникнути у всі внутрішні зв'язки проблеми прийняття рішень і, по-друге, послабити вплив суб'єктивного фактора. Крім того, різні критерії часто приводять до одного результату.

Таким чином, у випадку відсутності інформації про імовірності стану середовища теорія не дає однозначних і математично строгих рекомендацій стосовно вибору критеріїв прийняття рішень. Це пояснюється, в більшій мірі, не слабкістю теорії, а невизначеністю самої ситуації. Єдиний вихід у подібних випадках – здійснити спробу отримати додаткову інформацію (наприклад, шляхом проведення досліджень або експериментів). За відсутності додаткової інформації прийняті рішення теоретично недостатньо обгрунтовані і в значній мірі суб'єктивні. Однак, хоча використання математичних методів в іграх з природою не дає абсолютно достовірного результату і останній в певній мірі є суб'єктивним внаслідок довільності вибору критерія, воно, тим не менше, створює деяке упорядкування даних, які є у розпорядженні гравця, і сприяє підвищенню якості прийняття рішень, а саме:

- 1) задається множина станів природи;
- 2) визначаються виграші та програші при різних поєднаннях станів (A_j, Q_j).

Таке впорядкування уявлень про проблему само по собі сприяє підвищенню якості прийнятих рішень.

3. Припустимо тепер, що гравцю із попереднього досвіду відомі не тільки стани природи $Q_j, j = \overline{1, n}$, в яких може знаходитися природа Q , але й відповідні імовірності $p_j = P(Q = Q_j)$, з якими природа реалізує ці стани. В цій ситуації будемо говорити про задачу прийняття рішень в умовах ризику.

Розглянемо деякі критерії прийняття рішень у грі з природою в умовах ризику.

3.1. Критерій Байєса відносно виграшів.

За цим критерієм показником ефективності стратегії $A_i, i = \overline{1, m}$, обирається середнє значення (математичне сподівання) виграшу:

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}, i = \overline{1, m}. \quad (5.20)$$

Оптимальною серед чистих стратегій за критерієм Байєса буде стратегія A_{i_0} з максимальним показником ефективності (5.20):

$$\bar{a}_{i_0} = \max_i \bar{a}_i. \quad (5.21)$$

Отже, обране таким чином рішення є оптимальним не в кожному окремому випадку, а “в середньому”.

Задача 5.4. На промисловому підприємстві готуються до переходу на випуск нових видів продукції A_1, A_2, A_3, A_4 . Результати прийнятих рішень суттєво залежать від ступеня забезпеченості виробництва матеріальними ресурсами Q_1, Q_2, Q_3 . Кожному поєднанню рішень $A_i, i = \overline{1, 4}$, і станів середовища $Q_j, j = \overline{1, 3}$ відповідає певний виграш-ефективність випуску нових видів продукції. Ці виграші відображаються платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 40 \\ 70 & 20 & 30 \\ 35 & 85 & 20 \\ 80 & 10 & 35 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Знайти оптимальну стратегію за критерієм Байєса відносно виграшів, припустивши, що відомі імовірності станів природи $p_1=0,2$, $p_2=0,3$, $p_3=0,5$.

Розв'язування. Обчислимо середні виграші:

$$\overline{a_1} = 25 \cdot 0,2 + 35 \cdot 0,3 + 40 \cdot 0,5 = 35,5;$$

$$\overline{a_2} = 70 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,5 = 35;$$

$$\overline{a_3} = 35 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,3 + 20 \cdot 0,5 = 42,5;$$

$$\overline{a_4} = 80 \cdot 0,2 + 10 \cdot 0,3 + 35 \cdot 0,5 = 36,5.$$

Тоді згідно з критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_3 , оскільки $\overline{a_3} = \max_i \overline{a_i} = 42,5$.

3.2. Критерій Байєса відносно ризиків.

Показником ефективності стратегії A_i за критерієм Байєса відносно ризиків називається математичне сподівання ризиків, розташованих в i -му рядку матриці R_A :

$$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^n p_j r_{ij}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5.23)$$

Оптимальною буде стратегія з найменшим значенням середнього ризику $\overline{r_i}$:

$$\overline{r_{i_0}} = \min_i \overline{r_i}, \quad (5.24)$$

При цьому правильним є твердження про те, що критерії (5.21) і (5.24) еквівалентні, тобто за обома критеріями оптимальною буде одна і та ж стратегія.

3.3. Критерій Лапласа відносно виграшів.

В попередніх двох критеріях Байєса імовірності станів природи могли бути отримані, наприклад, на підставі статистичних даних. Однак часто зустрічаються ситуації, коли дослідник позбавлений можливості знаходити ці ймовірності. В таких випадках він вимушений оцінювати імовірності станів природи суб'єктивно. Існують різні методи числової суб'єктивної оцінки ступенів правдоподібності станів природи. Один із таких способів полягає в тому, що вони вважаються рівноімовірними: $p_1=p_2=\dots p_n=\frac{1}{n}$. Цей принцип називають також принципом «недостатніх підстав» Лапласа.

Таким чином, показник ефективності визначається формулою:

$$\overline{a_i} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad i = \overline{1, m},$$

а найкраща стратегія визначається за формулою (5.21).

Задача 5.5. Знайти оптимальну стратегію в умовах задачі 5.4 за критерієм Лапласа.

Розв'язування. Обчислимо середні виграші:

$$\overline{a_1} = \frac{1}{3} (25 + 35 + 40) = \frac{100}{3}, \quad \overline{a_2} = \frac{1}{3} (70 + 20 + 30) = 40,$$

$$\overline{a_3} = \frac{1}{3} (35 + 85 + 20) = \frac{140}{3}, \quad \overline{a_4} = \frac{1}{3} (80 + 10 + 35) = \frac{125}{3}.$$

Отже, оптимальною за критерієм Лапласа є стратегія A_3 , оскільки $\overline{a_3} =$

$$\max_i a_i = \frac{140}{3}.$$

Аналогічно розглядається критерій Лапласа і відносно ризиків.

3.4. Критерій Байєса відносно значень імовірностей станів природи з урахуванням виграшів.

Припустимо, що імовірності станів природи нам невідомі, але ми маємо уявлення про те, які стани природи більш імовірні, а які – менш імовірні. Це дозволить проранжувати невідомі імовірності станів природи у вигляді спадаючої або зростаючої числової послідовності.

Наприклад, можна вважати, що послідовність невідомих імовірностей p_j станів природи пропорційна членам деякої монотонної послідовності додатних чисел $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$:

$$p_1 : p_2 : \dots : p_n = \tau_1 : \tau_2 : \dots : \tau_n. \quad (5.25)$$

Тоді враховуючи умову нормування $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, можна отримати наступні оцінки імовірностей:

$$p_j = \tau_j \left(\sum_{k=1}^n \tau_k \right)^{-1}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (5.26)$$

Задача 5.6. Знайти оптимальну стратегію в умовах задачі 5.4, якщо є підстави вважати, що імовірності станів природи утворюють строго спадну числову послідовність, пропорційну спадній арифметичній прогресії 3,2,1, тобто

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3 : 2 : 1.$$

Розв'язування. Обчислимо оцінки імовірностей станів природи за формулою (5.26):

$$p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}. \text{ Тоді середні виграші рівні:}$$

$$\overline{a_1} = \frac{1}{2} \cdot 25 + \frac{1}{3} \cdot 35 + \frac{1}{6} \cdot 40 = \frac{185}{6}, \quad \overline{a_2} = \frac{1}{2} \cdot 70 + \frac{1}{3} \cdot 20 + \frac{1}{6} \cdot 30 = \frac{140}{3},$$

$$\overline{a_3} = \frac{1}{2} \cdot 35 + \frac{1}{3} \cdot 85 + \frac{1}{6} \cdot 20 = \frac{295}{6}, \quad \overline{a_4} = \frac{1}{2} \cdot 80 + \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 35 = \frac{295}{6}.$$

Отже, гравцю можна рекомендувати здійснити вибір між стратегіями A_3 і A_4 з найбільшими середніми виграшами.

Аналогічний критерій можна розглянути і для матриці ризиків.

4. Розглянемо тепер питання про те, у яких випадках слід проводити експерименти з метою отримання додаткової статистичної інформації про стани природи для прийняття більш ефективних рішень в умовах ризику.

Розглянемо спочатку так званий “ідеальний” експеримент, в результаті проведення якого гравець отримує точну інформацію про те, який стан природи буде в даній ситуації. В якості критерія прийняття рішень розглянемо критерій Байєса.

Без проведення експерименту оптимальною стратегією за критерієм Байеса відносно виграшів обиралася стратегія A_{i_0} з максимальним показником ефективності (5.21):

$$\overline{a_{i_0}} = \max_{i=1, m} \overline{a_i} = \overline{\alpha}. \quad (5.27)$$

Якщо в результаті проведеного експерименту з'ясувалося, наприклад, що природа буде знаходитися в стані Q_j , то як оптимальну слід обрати стратегію, для якої досягається найбільший виграш:

$$\beta_j = \max_{i=1, m} a_{ij},$$

де $\beta_j, j = \overline{1, n}$, - показник сприятливості стану природи Q_j . Тобто треба обирати таку стратегію, щоб найбільший елемент β_j j -того стовпця матриці A знаходився в рядку, що відповідає цій стратегії. Однак таке рішення ми можемо прийняти тільки після проведення експерименту. А нам потрібно вирішити спочатку питання про доцільність проведення експерименту, про який відомо тільки, що він є ідеальним, і не відомо, в якому стані Q_j буде знаходитися природа Q , тобто нам невідомий розмір майбутнього виграшу гравця A .

Таким чином, доцільно розглянути зважене середнє виграшів β_j з ваговими коефіцієнтами p_j , тобто виграш у випадку ідеального експерименту можна визначити так:

$$\overline{\beta} = \sum_{j=1}^n p_j \beta_j. \quad (5.28)$$

Тоді середній виграш гравця A з використанням ідеального експерименту зросте на величину $\overline{\beta} - \overline{\alpha}$. Отже, проведення експерименту має сенс, якщо вартість c такого експерименту задовольняє умову:

$$c < \overline{\beta} - \overline{\alpha}.$$

(5.29)

Задача 5.7. Знайти вартість ідеального експерименту за умовою задачі 5.4.

Розв'язування. Знайдемо показники сприятливості станів природи:

$$\beta_1 = 80, \beta_2 = 85, \beta_3 = 40.$$

Тоді $\overline{\beta} = 80 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,3 + 40 \cdot 0,5 = 61,5$. А тому оскільки $\overline{\alpha} = 42,5$, то вартість експерименту c буде меншою, ніж $\overline{\beta} - \overline{\alpha} = 19$ од. Тобто, якщо вартість експерименту $c \geq 19$ од., то експеримент проводити не вигідно.

Можна розв'язати цю задачу і в термінах ризиків, а саме:

$$c < \overline{r} = \min_i \overline{r_i} = \min_i \sum_{j=1}^n p_j r_{ij}. \quad (5.30)$$

При цьому отримуються ті ж результати, що і за умовою (5.29).

Тепер розглянемо питання про проведення експерименту, який не є ідеальним, тобто який дозволяє лише **збільшити точність імовірності** станів природи. В загальному випадку можна припустити, що такий експеримент Z веде до появи однієї із попарно несумісних подій $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$, імовірності яких залежать від того стану природи Q_j , при якому він проводився.

Припустимо, що ці умовні імовірності $P(Z_s|Q_j)$ подій $Z = Z_s$, при умові, що природа знаходиться у стані $Q = Q_j$, відомі. Тоді за формулами Байєса можна переоцінити імовірності станів природи, оскільки

$$P(Q|Z) = \frac{P(Q)P(Z|Q)}{P(Z)}, \quad (5.31)$$

або

$$P(Q = Q_j|Z = Z_s) = \frac{P(Q = Q_j) \cdot P(Z = Z_s|Q = Q_j)}{P(Z = Z_s)},$$

де $P(Q = Q_j) = p_j$ – апіорні імовірності станів природи, $P(Q = Q_j|Z = Z_s) = p_{js}$ – апостеріорні імовірності станів природи при умові, що результатом експеримента буде подія $Z = Z_s$; $P(Z = Z_s)$ – імовірність наслідку Z_s експеримента, що обчислюється за формулою повної імовірності

$$P(Z = Z_s) = \sum_{j=1}^n P(Q = Q_j) \cdot P(Z = Z_s | Q = Q_j), \quad s = \overline{1, k}. \quad (5.32)$$

Нехай $\overline{a}_{is} = \sum_{j=1}^n p_{jk} a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, k}$ – показник ефективності стратегії A_i за критерієм Байєса з апостеріорними ймовірностями станів природи Q_j ; $\overline{\beta}_s = \max_{i=1, m} \overline{a}_{is}$ – максимальний середній виграш при наслідку експеримента

$Z_s \in Z$; $\tilde{\beta} = \sum_{s=1}^k P(Z = Z_s) \overline{\beta}_s$ – середнє зважене максимальних виграшів $\overline{\beta}_s$ із ваговими коефіцієнтами, рівними повним імовірностям $P(Z = Z_s)$, що обчислюються за формулами (5.32).

Тоді середній виграш гравця A з використанням неідеального експерименту зростає на $\tilde{\beta} - \bar{\alpha}$. Таким чином, проведення експерименту має сенс, якщо вартість такого експерименту $\tilde{c}$ задовольняє умову, аналогічну (5.29):

$$\tilde{c} < \tilde{\beta} - \bar{\alpha}. \quad (5.33)$$

Можна розв'язати цю ж задачу і в термінах ризиків. При цьому результат (5.33) не зміниться.

Задача 5.8.

Знайти вартість проведення експерименту за умовою задачі 5.4, якщо матриця умовних імовірностей наслідків експерименту має такий вид:

$P(Z Q)$	Z_1	Z_2	Z_3
Q_1	0,6	0,25	0,15
Q_2	0,3	0,55	0,15
Q_3	0,1	0,25	0,65

Розв'язування. Обчислення апостеріорних імовірностей станів природи відобразимо у вигляді розрахункової таблиці:

Таб.5.1

Q	$P(Q)$	$P(Z Q)$			$P(Z Q)P(Q)$			$P(Q Z)$		
		Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3	Z_1	Z_2	Z_3
Q_1	0,2	0,6	0,25	0,15	0,12	0,05	0,03	0,462	0,147	0,075

Q_2	0,3	0,3	0,55	0,15	0,09	0,165	0,045	0,346	0,485	0,113
Q_3	0,5	0,1	0,25	0,65	0,05	0,125	0,325	0,192	0,368	0,812
$\sum P(Z Q_j) P(Q_j)$					0,26	0,34	0,40			

Нехай наслідком експерименту буде $Z = Z_1$ з апостеріорними ймовірностями станів природи 0,462; 0,346; 0,192 відповідно. Обчислимо показники ефективності стратегій гравця:

$$\overline{a_{11}} = 0,462 \cdot 25 + 0,346 \cdot 35 + 0,192 \cdot 40 = 31,94;$$

$$\overline{a_{21}} = 0,462 \cdot 70 + 0,346 \cdot 20 + 0,192 \cdot 30 = 45,02;$$

$$\overline{a_{31}} = 0,462 \cdot 35 + 0,346 \cdot 85 + 0,192 \cdot 20 = 49,42;$$

$$\overline{a_{41}} = 0,462 \cdot 80 + 0,346 \cdot 10 + 0,192 \cdot 35 = 47,14.$$

Тоді максимальний середній виграш при наслідку експерименту $Z = Z_1$ буде рівний:

$$\overline{\beta_1} = \max_{i=1,4} \overline{a_{i1}} = 49,42 \text{ од.}$$

Нехай наслідком експерименту буде $Z = Z_2$ з апостеріорними ймовірностями станів природи 0,147; 0,485; 0,368 відповідно. Знайдемо показники ефективності стратегій гравця:

$$\overline{a_{12}} = 0,147 \cdot 25 + 0,485 \cdot 35 + 0,368 \cdot 40 = 35,37;$$

$$\overline{a_{22}} = 0,147 \cdot 70 + 0,485 \cdot 20 + 0,368 \cdot 30 = 31,03;$$

$$\overline{a_{32}} = 0,147 \cdot 35 + 0,485 \cdot 85 + 0,368 \cdot 20 = 53,73;$$

$$\overline{a_{42}} = 0,147 \cdot 80 + 0,485 \cdot 10 + 0,368 \cdot 35 = 29,49.$$

Тоді максимальний середній виграш при наслідку експерименту $Z = Z_2$ дорівнює:

$$\overline{\beta_2} = \max_{i=1,4} \overline{a_{i2}} = 53,73 \text{ од.}$$

Нехай наслідком експерименту буде $Z = Z_3$ з апостеріорними ймовірностями станів природи 0,075; 0,113; 0,812 відповідно. Знайдемо показники ефективності стратегій гравця:

$$\overline{a_{13}} = 0,075 \cdot 25 + 0,113 \cdot 35 + 0,812 \cdot 40 = 38,31;$$

$$\overline{a_{23}} = 0,075 \cdot 70 + 0,113 \cdot 20 + 0,812 \cdot 30 = 31,87;$$

$$\overline{a_{33}} = 0,075 \cdot 35 + 0,113 \cdot 80 + 0,812 \cdot 20 = 28,47;$$

$$\overline{a_{43}} = 0,075 \cdot 80 + 0,113 \cdot 10 + 0,812 \cdot 35 = 35,55.$$

Тоді максимальний середній виграш при наслідку експерименту $Z = Z_3$ дорівнює:

$$\overline{\beta_3} = \max_{i=1,4} \overline{a_{i3}} = 38,31 \text{ од.}$$

Обчислимо зважене середнє максимальних виграшів $\overline{\beta_s}$ з ваговими коефіцієнтами, рівними повним ймовірностям $P(Z = Z_s)$:

$$\tilde{\beta} = \sum_{s=1}^k P(Z = Z_s) \overline{\beta_s} = 0,26 \cdot 49,42 + 0,34 \cdot 53,73 + 0,4 \cdot 38,31 = 46,44 \text{ од.}$$

А тому, оскільки $\bar{a} = 42,5$, то вартість експерименту C буде менша, ніж $C < \tilde{\beta} - \bar{a} = 3,94 \text{ од.}$

Тобто, якщо вартість експерименту $C \geq 3,94$, то такий експеримент проводити не вигідно.

5. Вибір рішень з допомогою дерева рішень.

Багато інвестиційних задач вимагають аналізу послідовності рішень і станів економічного середовища, коли одна сукупність стратегій інвестора і станів економічного середовища породжує другий стан подібного типу. Якщо мають місце два або більше станів економічного середовища, то з'являється цілий ланцюжок рішень, які з'являються один за одним.

В цьому випадку для розв'язування інвестиційної задачі використовується дерево рішень – графічне зображення послідовності рішень і станів економічного середовища із вказанням відповідних імовірностей для любых комбінацій рішень.

В загальному випадку для розв'язування задачі передбачається виконання наступних етапів.

1. **Формулювання задачі.** Необхідно серед множини факторів, що здійснюють вплив на розв'язування задачі, виділити суттєві і несуттєві. Далі потрібно виконати наступні основні процедури:

а) визначення можливості збору інформації для прийняття рішень і експериментування;

б) здійснення переліку подій (станів економічного середовища або ринку), які можуть відбутися з певною імовірністю;

в) встановлення часового порядку розташування подій, в наслідках яких міститься корисна і доступна інформація, і послідовності дій інвестора.

2. Побудова дерева рішень.

3. **Оцінка імовірностей стану ринку.** Ці імовірності визначаються або статистично, або експертним чином.

4. **Визначення величини доходу** (ефективності прийняття рішень) для кожної можливої комбінації дій інвестора і станів ринку.

5. Рішення задачі.

Розглянемо процедуру прийняття рішень на наступному прикладі.

Задача 5.9. Керівництво компанії для випуску нової продукції може створити:

а) велике підприємство; б) мале підприємство; в) продати патент. Розмір доходу, який може отримати компанія, залежить від стану ринку, який може бути сприятливим або несприятливим з однаковою імовірністю 0,5. Розміри можливих доходів (видатки йдуть із знаком мінус) зображені в табл.5.2. Знайти оптимальну (байєсівську) стратегію.

Табл.5.2.

Стратегії	Дії компанії	Дохід компанії (у.о.)	
		Сприятливий стан ринку	Несприятливий стан ринку
A_1	Будівництво великого	200000	-180000

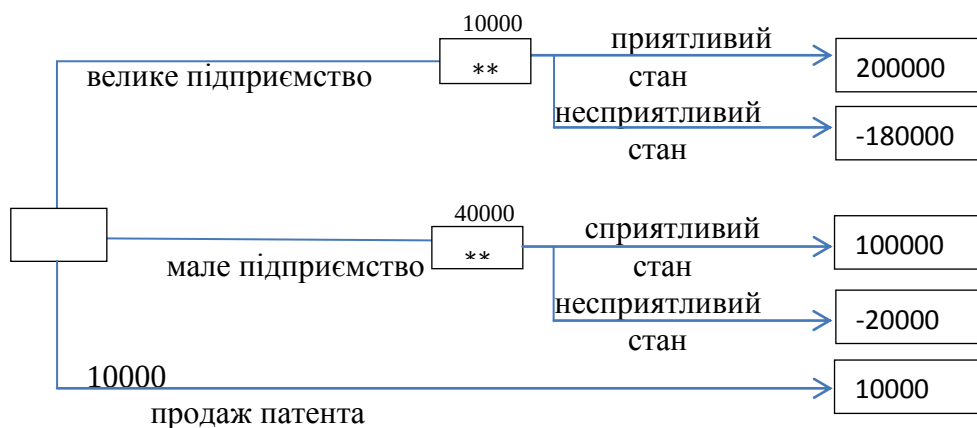
	підприємства		
A_2	Будівництво малого підприємства	100000	-200000
A_3	Продаж патенту	10000	10000

Розв'язування. 1. Побудуємо дерево рішень “зліва-направо”. 2. При русі «справа-наліво» обчислюємо для кожної вершини дерева очікувану грошову оцінку (ОГО) при виборі відповідної стратегії. 3. Здійснюємо вибір гілок, яким відповідає максимальне ОГО.

1. На підставі даних табл. 5.2 побудуємо дерево рішень в таких позначеннях:

– рішення приймає інвестор;

** – рішення “приймає” випадок.



мал.5.1.

2. Обчислимо середній очікуваний дохід інвестора для кожної можливої стратегії:

$$\bar{a}_1 = 200000 \cdot 0,5 + (-180000) \cdot 0,5 = 10000 (\text{у.о.});$$

$$\bar{a}_2 = 100000 \cdot 0,5 + (-20000) \cdot 0,5 = 40000 (\text{у.о.});$$

$$\bar{a}_3 = 10000 \cdot 1 = 10000 (\text{у.о.});$$

3. Отже, слід обрати другу стратегію, тобто створити мале підприємство, оскільки

$$\bar{a}_2 = \max_{i=1,3} \bar{a}_i = 40000 \text{ од.}$$

Ця задача інвестування засобів розв'язана при наявності апріорної інформації про імовірності можливих станів ринку.

Припустимо тепер, що деяка фірма за певну оплату пропонує надати інформацію про **справжній стан ринку** на той момент, коли керівництву компанії потрібно **прийняти рішення** про вибір найбільш вигідної стратегії.

Задача 5.10. Знайти вартість точної інформації про можливі стани ринку для задачі 5.9.

Розв'язування. Для знаходження максимальної вартості такої інформації необхідно знайти різницю між виграшем, який може отримати компанія при

наявності точної інформації і середнім вииграшем, що може отримати компанія при наявності тільки апріорної інформації про стани ринку (40000у.о.).

Обчислимо очікувану грошову оцінку виграшу компанії при наявності точної інформації про стани ринку, використавши дерево рішень (мал. 5.1):

$$\bar{\beta} = 200000 \cdot 0,5 + 10000 \cdot 0,5 = 105000(\text{у.о.}).$$

Тут 200000 у.о. – це максимальний виграш при сприятливому стані ринку (побудова великого підприємства), а 10000 у. о. – при несприятливому (продаж патенту).

Отже, максимальна вартість точної інформації про можливі стани ринку:

$$C = \bar{\beta} - \bar{\alpha} = 105000 - 40000 = 65000(\text{у.о.}).$$

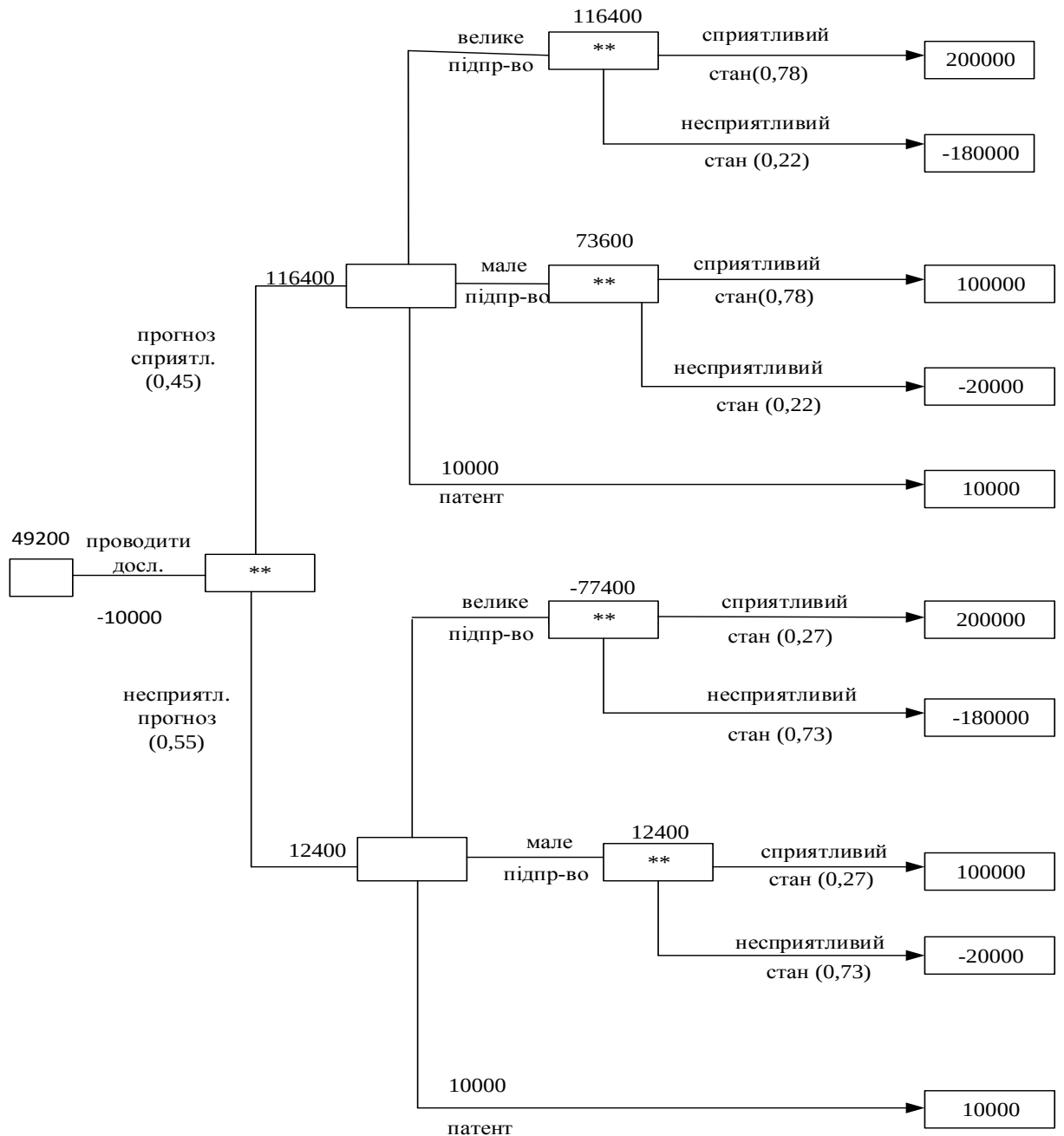
Тепер ускладнимо задачу, а саме припустимо, що компанія вирішила замовити дослідження станів ринку деякій фірмі, розуміючи при цьому, що додаткове дослідження **не здатне дати точну інформацію** про стан ринку, але допоможе уточнити очікувані оцінки станів ринку, змінивши тим самим імовірності цих станів.

Задача 5.11. В умовах задача 5.10. знайти чи варто компанії замовляти дослідження можливих станів ринку деякій фірмі, яка оцінює вартість своїх послуг в 10000 у. о. Про цю фірму відомо, що вона стверджує, що ситуація буде сприятливою з імовірністю 0,45 і несприятливою з імовірністю 0,55. Прогнози фірми справджуються наступним чином (відомо на підставі раніше складених нею прогнозів):

табл. 5.3

Прогноз фірми про стан ринку	Фактично	
	Сприятливий	Несприятливий
Сприятливий	0,78	0,22
Несприятливий	0,27	0,73

Розв’язування. Якщо компанія замовить дослідження даних фірмі, то дерево рішень матиме вид зображений на мал. 5.2.



мал. 5.2

Тут, наприклад,
 $116400 = 200000 \cdot 0,78 + (-180000) \cdot 0,22;$
 $59200 = 116400 \cdot 0,45 + 12400 \cdot 0,55;$
 $49200 = 59200 - 10000.$

Підведемо підсумки.

1. Необхідно провести додаткове дослідження ринку, оскільки при цьому очікуваний виграш компанії складе величину $\tilde{\beta} = 59200$ у. о., а з урахуванням оплати вартості експерименту – величину $59200 - 10000 = 49200$ у. о., що більше очікуваного виграшу (40000 у. о.) без проведення експерименту.

2. Якщо фірма прогнозує сприятливу ситуацію, то доцільно будувати велике підприємство (116400 у. о.), а при несприятливому прогнозі – мале підприємство (12400 у. о.)
3. Максимальна сума, яку компанія може заплатити за послуги фірми, дорівнює
 $C < \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} = 19200$.

Лекція 9-10

Постановка задач математичного програмування.

План

1. Історична довідка.
2. Предмет математичного програмування.
3. Математичне моделювання задач .
4. Класифікація задач МП.
5. Стандартні форми ЗЛП.

1. Історична довідка.

В суто математичному плані деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Однак, сучасне математичне програмування передусім розглядає властивості та розв'язки математичних моделей економічних процесів. Тому початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях, насамперед в економіці. Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці радянського вченого Л. В. Канторовича. Наприкінці 30-х років у Ленінградському університеті ним уперше були сформульовані та досліджувались основні задачі, критерії оптимальності, економічна інтерпретація, методи розв'язання та геометрична інтерпретація результатів розв'язання задач лінійного програмування (1939 року Л. В. Канторович оприлюднив монографію «Математичні методи організації і планування виробництва»). Сам термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса. Однак у своїй монографії Дж. Данциг зазначає, що Л. В. Канторовича слід визнати першим, хто виявив, що широке коло важливих виробничих задач може бути подане у чіткому математичному формулюванні, яке уможливорює підхід до таких задач з кількісного боку та розв'язання їх чисельними методами.

1947 року Дж. Данцигом також був розроблений основний метод розв'язування задач лінійного програмування — симплексний метод, що вважається початком формування лінійного програмування як самостійного напрямку в математичному програмуванні. Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що уможливило розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування є п'ятдесяті роки. У цей час з'являються розробки нових алгоритмів, теоретичні дослідження з різних напрямків математичного програмування: 1951 року — праця Г. Куна і А. Таккера, в якій наведено необхідні та достатні умови оптимальності нелінійних задач; 1954 року — Чарнес і Лемке розглянули наближений метод розв'язання задач з сепарабельним опуклим функціоналом та лінійними обмеженнями; 1955 року — ряд робіт, присвячених квадратичному програмуванню. У п'ятдесятих роках сформувався новий напрямок математичного програмування — динамічне програмування, значний вклад у розвиток якого вніс американський математик Р. Белман.

На жаль, у період найбухливішого розвитку математичного програмування за кордоном у Радянському Союзі не спостерігалось значних досягнень через штучні ідеологічні обмеження. Відродження досліджень з математичного моделювання економіки почалося в 60-80-тих роках і стосувалося опису «системи оптимального функціонування соціалістичної економіки». Серед радянських вчених того періоду слід виокремити праці В. С. Немчинова, В. В. Новожилова, Н. П. Федоренка, С. С. Шаталіна, В. М. Глушкова, В. С. Михалевича, Ю. М. Єрмольєва та ін.

На сучасному етапі математичне програмування включає широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних економічних систем. Розробляються банки економіко-математичних моделей, які в поєднанні з потужною, швидкодіючою обчислювальною технікою та сучасними програмними продуктами утворюватимуть системи ефективної підтримки прийняття рішень у різних галузях економіки.

2. Предмет математичного програмування.

Назва дисципліни «Математичне програмування» асоціюється передусім з програмуванням як процесом створення програм для ПЕОМ за допомогою спеціальної мови. Проте насправді це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming*, що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. Типова постановка задачі математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий. З цією метою використовуються математичні методи.

Реальні економічні задачі є достатньо складними, в яких, наприклад, кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність розроблення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач, тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва предмета — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, предметом якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Розв'язання екстремальної економічної задачі складається з побудови економіко-математичної моделі, підготовки інформації, відшукування оптимального плану, економічного аналізу отриманих результатів і визначення можливостей їх практичного застосування.

Математична модель економічного об'єкта (системи) — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

3. Математична постановка задачі математичного програмування

Математизація різноманітних галузей знань на сьогоднішній час не є чимось новим та несподіваним. Математичні методи широко застосовуються в сфері соціально – економічних,

екологічних, технічних, міжнародних відносин. Найрізноманітніші прикладні науки, такі як менеджмент, прийняття управлінських рішень, соціально – економічне прогнозування використовують математичний апарат для вирішення своїх проблем і навіть стимулюють розвиток прикладних галузей математики.

Використання сучасних методів моделювання зумовлено:

- загальною тенденцією розширення та поглиблення дослідження процесів в реальному фізичному світі;
- значною тривалістю ряду процесів (екологічних, хіміко - технологічних);
- практичною неможливістю отримувати необхідну інформацію, досліджуючи об'єкт – оригінал (об'єкти макро- та мікросвіту);
- неповними достовірними даними про фізичний об'єкт, що реально існує;
- складністю протікання реальних процесів;
- відсутністю належних умов чи кваліфікації персоналу для проведення досліджень;
- необхідністю проведення великої кількості експериментів, коли тривале дослідження стає економічно недоцільним;
- відсутністю самого об'єкту, що знаходиться на стадії проектування.

Терміни “модель”, “моделювання” ми часто використовуємо в реальному житті, вкладаючи подекуди в них зовсім різні поняття. При розгляді моделювання як універсального методу наукового пізнання доцільно ввести наступне означення моделі.

МОДЕЛЬ – це матеріальна або розумово – уявна система чи фізичний об'єкт, яка в процесі дослідження замінює об'єкт – оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об'єкт.

Під **МОДЕЛЮВАННЯМ** розуміють процес формалізації фізичного об'єкта метою якого є створення певного його аналога – моделі, що адекватна об'єктові. Моделювання – це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Всі моделі можуть бути умовно поділені на декілька видів.

I) Фізичні моделі є об'єктами, що існують реально і створюються з реальних матеріалів. Це дійсне відтворення реально існуючого об'єкту. Сюди відносять:

А) *Геометрично подібні* моделі (макети різних установок, приладів, будов). Вони використовуються у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об'єкт, компоновку його елементів, взаємне розміщення їх в просторі.

Б) *Фізично подібні* моделі (дослідження процесів продування моделі крила літака в аеродинамічній трубі). Вони створюються для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей та функціональних залежностей.

В) *Математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин та газів, що описуються однаковими диференціальними рівняннями як плинність електричного струму). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів (електричної моделі).

II) Уявні моделі існують в голові дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Вони поділяються на:

А) *Образні моделі* побудовані з чуттєво – наглядних ідеальних елементів, що використовуються для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ і т.д.).

Б) *Знакові моделі* відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об'єктом та його моделлю. Наприклад, заміна міста – точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста А в місто В йде поїзд...»).

В) *Образно – знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі. **Математична модель** фізичного об'єкта – це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов'язують вихідні характеристики стану об'єкта з вхідною інформацією, геометричними та іншими обмеженнями іншою інформацією, що накладається на функціонування об'єкту.

Математична модель знаходиться у відповідності з об'єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближеність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженість застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (неабсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об'єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ЕОМ).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з пропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз.* Тут виділяють найважливіші риси та властивості модельованого об'єкту та абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв'язок елементів, формують основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі.* Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Вияснюються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв'язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), вияснюють чи єдиний розв'язок, які змінні в ходитимуть в розв'язок та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватимуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* Тут використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв'язок.* Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ЕОМ можна провести багаточислені експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування.* Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Змінні величини бувають незалежними чи залежними, дискретними чи неперервними, детермінованими або випадковими. Наприклад, залежною змінною є собівартість продукції, незалежною від процесу функціонування підприємства величиною є початковий розмір статутного фонду, дискретною — кількість видів продукції, неперервною — час, площа посіву тощо, детермінованою — норма висіву насіння кукурудзи на гектар, норма витрати сировини на одиницю продукції, випадковою — величина прибутку, кількість телят, які народяться у плановому періоді тощо.

Вхідні змінні економічної системи бувають двох видів: керовані $x_j (j = 1, 2, \dots, n)$, значення яких можна змінювати в деякому інтервалі; і некеровані змінні $y_r (r = 1, 2, \dots, s)$, значення яких не залежать від волі людей і визначаються зовнішнім середовищем. Наприклад, обсяг придбаного пального — керована, а температура повітря — некерована змінна. Залежно від реальної ситуації керовані змінні можуть переходити у групу некерованих і навпаки. Наприклад, у разі насиченого ринку обсяги придбання дизельного палива є керованою змінною величиною, а за умов дефіциту цього ресурсу — некерованою.

Кожна економічна система має певну мету свого функціонування. Це може бути, наприклад, отримання максимуму чистого прибутку. Ступінь досягнення мети, здебільшого, має кількісну міру, тобто може бути описаний математично.

Нехай z — вибрана мета (ціль). За цих умов вдається, як правило, встановити залежність між величиною z , якою вимірюється ступінь досягнення мети, вхідними змінними та параметрами системи:

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l), \quad (1)$$

де параметри c_k ($k=1, 2, \dots, l$) є кількісними характеристиками системи.

Функцію z називають *цільовою функцією*, або *функцією мети*. Для економічної системи це є функція ефективності її функціонування та розвитку, оскільки значення z відображує ступінь досягнення певної мети.

У загальному вигляді задача математичного програмування формулюється так:

Знайти такі значення керованих змінних x_j , щоб цільова функція набувала екстремального (максимального чи мінімального значення).

Отже, потрібно відшукати значення

$$\max(\min) z = f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l). \quad (2)$$

Можливості вибору x_j , завжди обмежені зовнішніми щодо системи умовами, параметрами виробничо-економічної системи тощо.

Наприклад, площа посіву озимої пшениці обмежена наявністю ріллі та інших ресурсів, сівоzmінами, можливістю реалізації зерна, необхідністю виконання договірних зобов'язань тощо. Ці процеси можна описати системою математичних рівностей та нерівностей виду:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_s; c_1, c_2, \dots, c_l) \{ \leq, =, \geq \} 0, \quad (3)$$

де $i=1, 2, \dots, m$.

Тут набір символів ($\leq, =, \geq$) означає, що для деяких значень поточного індексу i виконуються нерівності типу $\geq$, для інших — рівності ($=$), а для решти — нерівності типу $\leq$.

Система (3) називається *системою обмежень*, або *системою умов* задачі. Вона описує внутрішні технологічні та економічні процеси функціонування й розвитку виробничо-економічної системи, а також процеси зовнішнього середовища, які впливають на результат діяльності системи. Для економічних систем змінні x_j мають бути невід'ємними:

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Залежності (2)—(4) утворюють *економіко-математичну модель* економічної системи. Розробляючи таку модель, слід дотримуватись певних правил:

Модель має адекватно описувати реальні технологічні та економічні процеси.

У моделі потрібно враховувати все істотне, суттєве в досліджуваному явищі чи процесі, нехтуючи всім другорядним, неістотним у ньому. Математичне моделювання — це мистецтво, вузька стежка між переспрощенням та переускладненням. Справді, прості моделі не забезпечують відповідної точності, і «оптимальні» розв'язки за такими моделями, як правило, не відповідають реальним ситуаціям, дезорієнтують користувача, а переускладнені моделі важко

реалізувати на ЕОМ як з огляду на неможливість їх інформаційного забезпечення, так і через відсутність відповідних методів оптимізації.

Модель має бути зрозумілою для користувача, зручною для реалізації на ЕОМ.

Необхідно, щоб множина змінних x_j була не порожньою. З цією метою в економіко-математичних моделях за змоги слід уникати обмежень типу « $\Rightarrow$ », а також суперечливих обмежень.

Наприклад, ставиться обмеження щодо виконання контрактів, але ресурсів недостатньо, аби їх виконати. Якщо система (3), (4) має єдиний розв'язок, то не існує набору різних планів, а отже, й задачі вибору оптимального з них.

Будь-який набір змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ що задовольняє умови (3) і (4), називають *допустимим планом*, або *планом*. Очевидно, що кожний допустимий план є відповідною *стратегією економічної системи, програмою дій*. Кожному допустимому плану відповідає певне значення цільової функції, яке обчислюється за формулою (1).

Сукупність усіх розв'язків системи обмежень (3) і (4), тобто множина всіх допустимих планів утворює *область існування планів (область допустимих планів)*.

План, за якого цільова функція набуває екстремального значення, називається *оптимальним*. Оптимальний план є *розв'язком задачі математичного програмування* (2)—(4).

4. Класифікація задач математичного програмування

У математичному програмуванні виділяють два напрямки — *детерміновані* задачі і *стохастичні*. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин. Наприклад, якщо в економіко-математичній моделі прибутки, врожайності сільськогосподарських культур тощо задані своїми математичними сподіваннями, то така задача є детермінованою. Якщо ж ці величини задані функціями

розподілу, наприклад нормального з математичним сподіванням a і дисперсією D , то така задача є стохастичною.

Якщо у відповідних економічних процесах випадкові явища не відіграють істотної ролі, то задачу можна розв'язувати як детерміновану. У іншому разі адекватна економіко-математична модель має бути стохастичною, тобто містити випадкові функції та величини. Структура та розв'язування таких задач вивчаються в окремому розділі, який називається *стохастичним програмуванням*.

Кожен з названих напрямків включає типи задач математичного програмування, які в свою чергу поділяються на інші класи.

Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути **статичними** (однокроковими) або **динамічними** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов'язане зі змінами об'єкта (явища, процесу) у часі. Наприклад, якщо йдеться про план розвитку економіки України до 2005 року, то мають бути обґрунтовані значення відповідних макроекономічних показників не лише на 2005 рік, а й на всі проміжні роки, тобто слід планувати поступовість

(динаміку) розвитку народногосподарських процесів. Такий план називають *стратегічним*. У ньому має бути обґрунтована оптимальна (найкраща, але реальна) траєкторія розвитку народного господарства. Проте під впливом некерованих чинників фактичні показники щороку можуть відхилятися від запланованих. Тому постає необхідність коригувати кожний річний план. Такі плани називають *тактичними*. Вони визначаються в результаті розв'язання статичної економіко-математичної задачі.

Важливо чітко усвідомити відмінність між одно- та багатокроковими задачами. Багатокроковість як метод розв'язування задач математичного програмування зумовлюється, насамперед, багатовимірністю задачі й означає, що послідовно застосовуючи індукцію, крок за кроком знаходять оптимальні значення множини змінних, причому отриманий на кожному кроці розв'язок має задовольняти умови оптимальності попереднього розв'язку. Така процедура може бути більш чи менш тісно пов'язана з часом. Однокрокові задачі, навпаки, характеризуються тим, що всі компоненти оптимального плану задачі визначаються водночас на останній ітерації (останньому кроці) алгоритму. Потрібно розрізнити ітераційність алгоритму і його багатокроковість. Наприклад, симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування є ітераційним, тобто у певний спосіб дістають допустимий план і в результаті деякої кількості ітерацій визначають оптимальний план. Тут виконуються ітерації (кроки) алгоритму симплексного методу, але це не можна інтерпретувати як багатокроковість економічного процесу (явища). Деякі задачі математичного програмування можна розглядати як одно- або багатокрокові залежно від способу їх розв'язання. Якщо задачу можна розв'язувати як однокрокову, то розв'язувати її як багатокрокову недоцільно, бо в такому разі для знаходження оптимального плану необхідно застосовувати складніші методи. Проте більшість економічних процесів є динамічними, їх параметри змінюються в часі й залежать від рішень керівництва, які доводиться приймати з метою спрямування розвитку економічної системи за траєкторією, яка визначена стратегічним планом.

Задачі математичного програмування поділяють також на *дискретні* і *неперервні*. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремих тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами *цілочислового програмування*. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є *неперервною*.

Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на *лінійні* та *нелінійні*. Якщо цільова функція (2) та обмеження (3) є лінійними, тобто містять змінні x_i тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

Найпростішими з розглянутих типів є статичні, детерміновані, неперервні та лінійні задачі. Важливою перевагою таких задач є те, що для їх розв'язування розроблено універсальний метод, який називається *симплексним методом*. Теоретично кожну задачу лінійного програмування можна розв'язати. Для деяких типів лінійних задач, що мають особливу структуру, розробляють спеціальні методи розв'язання, які є ефективнішими. Наприклад, транспортну задачу можна розв'язати симплексним методом, але ефективнішими є спеціальні методи, наприклад, метод потенціалів.

Економічні та технологічні процеси, як правило, є нелінійними, стохастичними, розвиваються за умов невизначеності. Лінійні економіко-математичні моделі часто є неадекватними, тобто такими, що неточно описують процес, який досліджується, тому доводиться будувати стохастичні, динамічні, нелінійні моделі. Розв'язувати такі задачі набагато складніше, ніж лінійні, оскільки немає універсального методу їх розв'язання. Для окремих типів нелінійних

задач розроблено спеціальні числові методи розв'язання. Проте слід зазначити, що на практиці застосовують, здебільшого, лінійні економіко-математичні моделі. Часто нелінійні залежності апроксимують (наближають) до лінійних. Такий підхід є доволі ефективним.

У нелінійному програмуванні (залежно від функцій, які використовуються в економіко-математичній моделі) виокремлюють опукле та квадратичне програмування. *Задача належить до опуклого програмування* у тому разі, коли цільова функція *вгнута*, якщо вона мінімізується, та *опукла*, якщо вона максимізується, а всі обмеження — однотипні нерівності типу ($\leq$) або рівняння, в яких ліві частини є опуклими функціями, а праві частини — сталими величинами. У разі обмежень типу ($\geq$) їх ліві частини мають бути вгнутими функціями. Тоді область допустимих планів є опуклою та існує глобальний, єдиний екстремум. *Квадратичне програмування* — якщо цільова функція квадратична, а обмеження лінійні.

Щойно було розглянуто лише основні типи задач математичного програмування. Можна також за різними ознаками виокремити й інші підтипи. Це особливо стосується задач лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Наприклад, як окремий тип розглядають *дробово-лінійне програмування*, коли обмеження є лійними, а цільова функція — дробово-лінійна. Особливий тип становлять задачі *теорії ігор*, які широко застосовуються в ринковій економіці. Адже тут діють дві чи більше конфліктних сторін, які мають частково або повністю протилежні цілі. У сукупності задач теорії ігор, у свою чергу, також виокремлюють певні підтипи. Наприклад, *ігри двох осіб із нульовою сумою*.

Наведена вище класифікація задач використана для структурування курсу «Математичне програмування».

Приклади економічних задач математичного програмування

Складність економічних систем (явищ, процесів) як об'єктів досліджень вимагає їх ретельного вивчення з метою з'ясування найважливіших функціональних залежностей, внутрішніх взаємозв'язків між їхніми елементами. В результаті здійснюються можливі спрощення та допущення, що, очевидно, погіршує адекватність побудованих математичних моделей і є чудовим приводом для критики. Однак лише прийняття певних допущень уможливорює формалізацію будь-якої економічної ситуації.

Не існує загальних рекомендацій щодо процесу моделювання, тому в кожному конкретному разі вимоги до побудови математичної моделі залежать від цілей та умов досліджуваної системи.

У процесі застосування математичного моделювання в економіці чітка постановка задачі та її формалізація є найскладнішим етапом дослідження, вимагає ґрунтовних знань передусім економічної суті процесів, які моделюються. Однак, вдало створена математична модель може надалі застосовуватись для розв'язування інших задач, які не мають відношення до ситуації, що початково моделювалася. Починаючи з робіт Л. В. Канторовича, в математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, економіко-математичні моделі яких широко використовуються в практичних дослідженнях економічних проблем.

Наведемо кілька вже формалізованих типових постановок економічних задач, що розв'язуються методами математичного програмування (більшість сформульованих задач будуть вивчатися в наступних розділах).

Всі розглянуті задачі залежно від наявності та точності початкової інформації, мети дослідження, ступеня врахування невизначеності, специфіки застосування до конкретного процесу можуть бути сформульовані як у вигляді статичних, детермінованих, неперервних лінійних задач, так і в складнішій постановці, де один, кілька чи всі параметри визначаються з певним рівнем імовірності та використовуються нелінійні залежності.

Задача визначення оптимального плану виробництва: для деякої виробничої системи (цеху, підприємства, галузі) необхідно визначити план випуску кожного виду продукції за умови найкращого способу використання наявних ресурсів. У процесі виробництва задіяний визначений набір ресурсів: сировина, трудові ресурси, технічне обладнання тощо. Відомі загальні запаси ресурсів, норми витрат кожного ресурсу та прибуток з одиниці реалізованої продукції. Задаються також за потреби обмеження на обсяги виробництва продукції у певних співвідношеннях (задана асортиментність). Критерії оптимальності: максимум прибутку, максимум товарної продукції, мінімум витрат ресурсів.

Задача про «дієту» (або про суміш): деякий раціон складається з кількох видів продуктів. Відомі вартість одиниці кожного компонента, кількість необхідних організму поживних речовин та потреба в кожній речовині, вміст в одиниці кожного продукту кожної поживної речовини. Необхідно знайти оптимальний раціон — кількість кожного виду продукту, що враховує вимоги забезпечення організму необхідною кількістю поживних речовин. Критерій оптимальності — мінімальна вартість раціону.

Транспортна задача: розглядається певна кількість пунктів виробництва та споживання деякої однорідної продукції (кількість пунктів виробництва та споживання не збігається). Відомі обсяги виготовленої продукції в кожному пункті виробництва та потреби кожного пункту споживання. Також задана матриця, елементи якої є вартістю транспортування одиниці продукції з кожного пункту виробництва до кожного пункту споживання. Необхідно визначити оптимальні обсяги перевезень продукції, за яких були б найкраще враховані необхідності вивезення продукції від виробників та забезпечення вимог споживачів. Критерії оптимальності: мінімальна сумарна вартість перевезень, мінімальні сумарні витрати часу.

Задача оптимального розподілу виробничих потужностей: розглядаються кілька підприємств, що виготовляють певну кількість видів продукції. Відомі фонд робочого часу кожного підприємства; потреби в продукції кожного виду; матриця потужностей виробництва всіх видів продукції, що виготовляються на кожному підприємстві, а також собівартості виробництва одиниці продукції кожного підприємства. Необхідно розподілити виробництво продукції між підприємствами у такий спосіб, щоб задовольнити потреби у виготовленні продукції та максимально використати виробничі потужності підприємств. Критерій оптимальності: мінімальні сумарні витрати на виготовлення продукції.

Задача про призначення: нехай набір деяких видів робіт може виконувати певна чисельність кандидатів, причому кожного кандидата можна призначати лише на одну роботу і кожна робота може бути виконана тільки одним кандидатом. Відома матриця, елементами якої є ефективності (у вибраних одиницях) кожного претендента на кожній роботі. Розв'язком задачі є оптимальний розподіл кандидатів на посади. Критерій оптимальності: максимальний сумарний ефект від виконання робіт.

Задача комівояжера: розглядається кілька міст. Комівояжеру необхідно, починаючи з міста, в якому він перебуває, обійти, не буваючи ніде двічі, всі міста і повернутися в початкове. Відома матриця, елементи якої — вартості пересування (чи відстані) між всіма попарно пунктами подорожі. Знайти оптимальний маршрут. Критерій оптимальності: мінімальна сумарна вартість (відстань) пересування по маршруту.

Задача оптимального розподілу капіталовкладень. Планується діяльність групи (системи) підприємств протягом деякого періоду, який розділено на певну кількість підперіодів. Задана сума коштів, які можна вкладати в будь-яке підприємство чи розподіляти між ними протягом всього періоду

планування. Відомі величини збільшення виробництва продукції (за умови здійснення додаткових капіталовкладень) у кожному з підприємств групи для всіх підперіодів. Необхідно визначити, як розподіляти кошти на початку кожного підперіоду між підприємствами так, щоб сумарний дохід за весь період був максимальним.

В основу моделей лінійного програмування закладені два прості допущення, які майже завжди виконуються:

- припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;
- припущення аддитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Задача. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види їжі: $B1, B2, B3$ і необхідна кількість поживних речовин позначена $A1, A2, A3, A4$. Позначимо α_{ij} - кількість поживних речовин вигляду Ai в їжі Bj , β_i - мінімальна добова потреба в речовині; c_i - ціна одиниці їжі. Дані запишемо в таблицю

Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види їжі			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B1	B2	B3	
A1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці їжі	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \geq \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \geq \beta_2, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \geq \beta_3, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 \geq \beta_4. \end{cases} \quad (1)$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 (\min) \quad (2)$$

Так як від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$.

До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формуються так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (1) знайти такий, який надає функції (2) найменшого значення.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (\text{extr}) \quad (2)$$

набуває екстримального (максимального чи мінімального) значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1. *Будь – яку задачу ЛП можна звести до ОЗЛП з ОР.*

Приймемо це твердження без доведення. Зауважимо лише, як це потрібно зробити: спочатку до менших частин всіх обмежень – нерівностей потрібно додати нову невід’ємну невідому, яка перетворить її в рівність. ОЗЛП з ОН полягає в тому, що серед усіх невід’ємних розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n < b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n < b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n < b_m \end{cases} \quad (3)$$

знайти такий, при якому форма

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (\text{extr}) \quad (4)$$

набуває екстримального значення.

Справедливе наступне твердження.

Лема 2. *ОЗЛП з ОР завжди може бути зведена до ОЗЛП з ОН.*

І звідси випливає така теорема

Теорема 1. *ОЗЛП з ОР і ОЗЛП з ОН еквівалентні між собою.*

Тобто, кожному розв’язку $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$ відповідає єдиний розв’язок $X_{\text{роз}}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b$, який одночасно є розв’язком нерівності, і, навпаки, кожному розв’язку рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ $X_{\text{роз}}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*)$ і нерівності $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$ відповідає єдиний розв’язок $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ нерівності.

Щоб звести задачу до другої стандартної форми, необхідно методом Жордана-Гаусса виділити базисні невідомі та використавши невід’ємність невідомих звести до нерівностей обмеження ЗЛП.

Приклад. Звести до ОЗЛП з ОН задачу

$$z = 2 - x_1 + 3x_2 \quad (\text{min}),$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

Розв'язування. Випишемо матрицю системи обмежень

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

і шукаємо ранг матриці, базисним буде мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Отже, ранг матриці рівний 2, x_1, x_4 - вільні невідомі, x_2, x_3 - базисні. Розв'язавши систему відносно базисних невідомих, маємо

$$\begin{cases} x_2 = 9 - 3x_1 + x_4, \\ x_3 = 1 + x_1 + 2x_4, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4). \end{cases}$$

Так як $x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$, то з останньої системи маємо:

$$\begin{cases} 9 - 3x_1 + x_4 \geq 0, \\ 1 + x_1 + 2x_4 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Запишемо форму через вільні невідомі

$$z = 2 - x_1 + 3(9 - 3x_1 + x_4) = 29 - 10x_1 + 3x_4.$$

Таким чином, ОЗЛП з ОН рівносильна до даної має вигляд:

$$z = 29 - 10x_1 + 3x_4$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_4 \leq 9, \\ -x_1 - 2x_4 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що ОЗЛП з ОН рівносильна до ОЗЛП з ОР може мати різні вигляди, все залежить від того, які ми невідомі оголосимо базисними, а які вільними.

Контрольні запитання

1. Що таке моделювання? Чим зумовлене використання моделювання?
2. Що таке модель? Прокласифікуйте відомі вам моделі.
3. Що таке математичні моделі? Які їх особливості?

4. Що таке математичне моделювання? Сформулюйте основні етапи математичного моделювання.
5. Прокласифікуйте задачі математичного моделювання.
6. Які задачі називають оптимізаційними? Прокласифікуйте їх.
7. Який розв'язок задачі лінійного програмування називають оптимальним?
8. Які припущення закладають в основу моделі лінійного програмування?
9. Яка математична суть задач лінійного програмування?

Лекція 11

Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

План

1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування.
2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

1. Для кращого розуміння алгебраїчних властивостей задач лінійного програмування скористаємось їх геометричною інтерпретацією. Введемо поняття опуклої множини.

Означення 1. Множина точок M називається **опуклою**, якщо разом з будь – яким двома її точками множині належить і відрізок, що їх сполучає.

Означення 2. Множина називається **обмеженою**, якщо її можна помістити в кулю (коло) скінченного радіуса з центром в будь – якій точці множини, і **необмеженою** в протилежному випадку.

Означення 3. **Граничною** називається така точка множини, в довільному околі якої є і точки, що належать множині, і точки, що їй не належать.

Означення 4. Сукупність граничних точок множини називається її **границею**.

Найпростіший приклад опуклої множини – опуклий багатокутник. Його границя складається з відрізків чи прямих. Точки, в яких перетинаються відрізки чи прямі границі багатокутника називаються його **вершинами**.

Означення 5. **Перетином** областей називають множину точок, що належать кожній з цих областей.

Теорема 2. Перетин будь – якого числа опуклих областей завжди є опукла множина.

Для геометричної інтерпретації будемо розглядати ОЗЛП з ОН, які містять лише дві невідомі, оскільки вони легко відображаються на прямокутній декартовій системі координат. Задачі з трьома невідомими на малюнку розглядатимуться в проекції, що утруднить їх розгляд, а задачі з більшою кількістю невідомих взагалі важко уявити геометрично.

Розглянемо задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 \quad (\text{extr}) \quad (6)$$

Лема 3. Розв'язком нерівності $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ є півплощина.

Означення 6. Півплощину, побудовану за нерівністю $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 < b_i$ називають **півплощиною розв'язків нерівності**, її границю – **граничною прямою** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$.

Означення 7. Сукупність точок, яка задовольняє систему нерівностей (5), називають **многокутником розв'язків (або областю допустимих значень-ОДЗ)**.

Теорема 3. Многокутник розв'язків завжди є опуклою фігурою.

Теорема 4. Оптимальне значення задачі лінійного програмування досягається у вершині многокутника розв'язків.

Таким чином задачу лінійного програмування можна інтерпретувати так: у многокутнику розв'язків знайти таку вершину, де цільова функція набуває найменшого (найбільшого) значення.

2. На основі геометричної інтерпретації сформуємо алгоритм графічного методу відшукування оптимальних значень функції.

1) **Будуємо многокутник розв'язків.** Він складається з перетину окремих півплощин розв'язків системи (5). В силу обмежень $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ многокутник розв'язків завжди міститься в першому квадранті.

2) **Знаходимо оптимальну точку.** Вона міститься в вершині многокутника розв'язків. Для її відшукування відкладають *вектор нормалі* прямої $C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$, $\vec{N}(C_1, C_2)$. Потім рисуємо лінію перпендикулярну до вектора нормалі, вона називається *лінією рівня*. Пересуваючи лінію рівня в напрямі вектора нормалі до останньої вершини многокутника розв'язків, отримуємо точку максимуму цільової функції, пересуваючи цю лінію в протилежному до вектора нормалі напрямі, в останній вершині дотику отримуємо точку мінімуму цільової функції.

3) **Обчислюємо оптимальні значення.** Знаходимо координати вершин $\max$ і $\min$, як розв'язок системи рівнянь, що визначають сторони многокутника, що утворюють ці вершини. Знайдені координати підставляємо в форму (6).

Зауважимо, що якщо многокутник розв'язків необмежений, то можливо, що мінімального чи максимального (або й обох) значень не існує, тобто – це $+\infty$ чи $-\infty$.

Контрольні запитання

1. Які є типи задач лінійного програмування?
2. Сформулюйте задачі лінійного програмування з обмеженнями – рівностями та обмеженнями – нерівностями.
3. Які твердження визначають взаємозв'язок між ОЗЛП з ОР та ОЗЛП з ОН?
4. Яка множина називається опуклою?
5. Яка множина називається обмеженою, необмеженою?
6. Що таке гранична точка? Границя?
7. Сформулюйте теорему про перетин довільного числа опуклих областей.
8. Що таке півплощина розв'язків, гранична пряма, многокутник розв'язків?
9. Де знаходиться оптимальне значення ЗЛП?
10. Сформулюйте алгоритм графічного методу відшукування оптимальних значень функції.
11. Що таке вектор нормалі, лінія рівня?
12. Як обчислити оптимальні значення цільової функції?

Лекція 12-13

Симплексний метод та його застосування

План

1. Поняття про симплексний метод та канонічну форму ОЗЛП з ОР.
2. Основні характеристики симплексного - методу.
3. Робота з симплекс - таблицями.

1. Симплексний метод – один з основних методів розв’язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення 1. Невід’ємний базисний розв’язок (план) будемо називати **опорним**.

Отже, **ідея методу** полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід’ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з одною вільною.

Ми бачили, що кожному опорному плану відповідає певним чином записана ОЗЛП з ОР. Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід’ємні
3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення 2. ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умови 1. – 3. називають **канонічною формою**.

Означення 3. Систему обмежень, що задовольняє умови 1. - 2. називають **канонічною системою обмежень**.

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

2. При розв’язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв’язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назовемо **симплексним методом** (чи **симплекс-методом**).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота.** Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв’язком задачі.
2. **Область застосовності.** Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо розв’язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.
3. **Властивість збіжності.** Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв’язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?

4. **Вимоги до обчислень.** З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

3. Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана – Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс – таблицями: Якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є **оптимальним**.

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпритувати як приріст функції z при збільшенні вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

Запишемо **алгоритм роботи з симплекс – таблицями:**

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору **ключового стовпця** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідженні цільової функції на максимум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Для вибору **ключового елемента** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика “опорний план”) до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.
6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо **ключовий елемент**.
7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.
8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати **ведучим**.
9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса
 - а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;
 - б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;
 - в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в п.б), і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.
10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв'язок.

Контрольні запитання

1. Що називається опорним планом?
2. В чому полягає ідея симплексного методу?
3. Що таке канонічна форма задачі лінійного програмування?
4. Що таке канонічна система обмежень? Майже канонічна система обмежень?
5. Сформулюйте властивості симплексного – методу.

6. Сформулюйте критерій оптимальності ЗЛП за симплекс-таблицями.
7. Опишіть алгоритм роботи з симплекс – таблицями.
8. Що таке ключовий стовпець, ключовий рядок, ключовий елемент?
9. Що таке провідний рядок?
10. Як проводити перетворення симплекс – таблиці?

Лекція 14

Двоїстість в лінійному програмуванні

План

1. Поняття про взаємно двоїсті задачі.
2. Загальні правила складання двоїстих задач.
3. Зв'язок між оптимальними розв'язками двоїстих задач.

1. Використовуючи коефіцієнти задачі лінійного програмування можна скласти ще одну задачу лінійного програмування, яка називається двоїстою до заданої.

Означення 1. Дві задачі лінійного програмування називаються **взаємно двоїстими**, якщо виконуються такі умови:

- 1) матриці системи обмежень обох задач є транспонованими, одна відносно другої;
 - 2) система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах напрямлені у протилежні боки;
 - 3) коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої і навпаки;
 - 4) форми в обох задачах оптимізуються протилежно (одна на максимум, друга – на мінімум).
- В загальному випадку приладами взаємно двоїстих задач є задачі M та m . Задача M :

$$z = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k \quad (\max) \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \leq b_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sk}x_k \leq b_s, \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, k). \end{cases} \quad (2)$$

Задача m :

$$z^* = b_0 + b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_sy_s \quad (\min) \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{s1}y_s \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{s2}y_s \geq c_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{1k}y_1 + a_{2k}y_2 + \dots + a_{sk}y_s \geq c_k, \\ y_j \geq 0, (j = 1, 2, \dots, s). \end{cases} \quad (4)$$

Умови означення виконуються автоматично. Наприклад, очевидно, що матриця системи обмежень першої задачі є транспонованою до матриці системи обмежень другої задачі.

Першу з цих ЗЛП називають вихідною задачею, другу – двоїстою до вихідної. Зауважимо, що двоїстою задачею до двоїстої буде знов вихідна задача.

Економічну суть двоїстих задач можна пояснити на прикладі задачі про ресурси. Вихідною буде задача: *організувати випуск продукції так, щоб використовуючи наявні ресурси отримати найбільший (максимальний) прибуток*. Двоїстою до неї: *якою має бути ціна кожного ресурсу, щоб при заданих запасах та прибутках від одиниці продукції загальні витрати були найменшими (мінімальними)*.

2. Зрозуміло, що для кожної задачі лінійного програмування можна побудувати двоїсту, бо ЗЛП завжди зводиться до другої стандартної форми (ЗЛП з ОН). Сформулюємо **правила побудови двоїстої задачі**:

Перевірка умов:

- 1) в усіх обмеженнях вільні члени містяться справа, елементи з невідомими – зліва;
- 2) всі обмеження нерівності вихідної задачі записані так, що знаки спрямовані в один бік (якщо це не так, то потрібно перемножити обмеження на -1);
- 3) загальний знак нерівностей пов'язаний з оптимізацією форми наступним чином:

$$"\leq" \Rightarrow \max, \quad "\geq" \Rightarrow \min.$$

Побудова двоїстої задачі:

1) Кожному обмеженню вихідної задачі відповідає невідома y_i у двоїстій задачі, причому двоїста невідома, що відповідає обмеженню нерівності, має бути невід'ємною, а рівності – довільного знаку.

2) Кожній невідомій x_j двоїстої задачі відповідає обмеження двоїстої. Будуються ці обмеження так: перемножуються коефіцієнти a_{ij} , що стоять при x_j на відповідні двоїсті невідомі y_i . Результати множення підсумовуються і розміщуються в лівій частині обмеження, а в правій – коефіцієнт c_{ij} , при x_j в оптимізуючій формі.

3) В усіх обмеженнях двоїстої задачі ставимо один і той самий знак нерівності, протилежний до загального знака нерівності системи обмежень вихідної задачі.

4) Форму двоїстої задачі оптимізуємо протилежно до форми вихідної задачі.

5) Коефіцієнти при двоїстих невідомих у формі є вільними членами системи обмежень вихідної задачі. Вільний член c_0 форми вихідної задачі переноситься у форму двоїстої задачі без змін.

3. Зв'язок вихідної і двоїстої задач обумовлений тим, що розв'язок одної з них можна добути безпосередньо з розв'язку другої. Для цього використовуємо такі важливі твердження.

Теорема 1. Якщо у двоїстих задачах одна з них має розв’язок, то буде існувати розв’язок і для другої задачі, а оптимальні значення при цьому збігаються, тобто $Z_{\max} = Z^*_{\min}$.

Теорема 2. Для того, щоб x^* і y^* були оптимальними розв'язками задач М і m відповідно, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$y_i^* \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0; \quad y_i^* \left(\sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0.$$

З теореми 2 випливає, що коли обмеження задачі на оптимальному розв'язку не перетворюються на точну рівність, то відповідна невідома оптимального розв'язку обов'язково дорівнює нулю.

Контрольні запитання

1. Які задачі лінійного програмування називають взаємно двоїстими?
2. Сформулюйте умови необхідні для вигляду вихідної задачі.
3. Сформулюйте правила побудови двоїстої задачі?
4. Що буде двоїстою до двоїстої задачі? Чи це завжди так?
5. Який зв'язок між розв'язками двоїстих задач?
6. Яка ознака оптимальності розв'язків двоїстих задач?

Лекція № 15

Метод штучного базису

План

1. Поняття про метод штучного базису.
2. Двоїстий симплексний метод.

1. Вибір початкової канонічної форми дає змогу формалізувати відшукування оптимального розв'язку за симплекс-таблицями. Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень виглядає так, як це було в задачі про використання ресурсів:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad b_i \geq 0, \quad (i=1,2,\dots,m).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень (а з нею і ОЗЛП з ОР) канонічної форми. З іншого боку, така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях. Крім того, є такі задачі, які взагалі не мають жодного допустимого плану.

Нехай ОЗЛП з ОР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0, \end{cases}$$

$$(\max)z = c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

записана так, що всі вільні члени $b_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це треба, рівняння з від'ємним вільним членом на -1 .

Щоб дістати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній невідомій $w_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, m)$, які будемо називати штучними. В результаті система обмежень набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + w_1 = b_1, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + w_m = b_m, \\ x_1, \dots, x_n \geq 0, w_1, \dots, w_m \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

До неї додаємо штучну форму

$$(\min) f = w_1 + \dots + w_m. \quad (2)$$

Задача (1), (2) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних невідомих $w_1, \dots, w_m$. Залишається у формі (2) із системи обмежень (1) записати $w_i (i = 1, \dots, m)$ через вільні невідомі $x_1, \dots, x_n$.

Означення 1. Систему обмежень будемо називати **сумісною** в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.

Теорема 1. Для того щоб система обмежень була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (1)

$$f_{\min} = 0.$$

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо оптимальний план задачі (1)-(2) містить хоча б одну штучну невідому w_i , то вихідна задача не має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.

Теорема 1 дає практично крім факту існування допустимого плану і метод його відшукування. Зазвичай, знайдений допустимий план є завжди опорним. На прикладі розглянемо методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

Контрольні запитання:

1. Наведіть приклад задачі, яка не має опорного плану. Чому?
2. Яка стандартна форма для задачі, що розв'язується штучним базисом?
3. Що таке штучна форма? Як її сформувати?
4. Яка система обмежень називається сумісною?

Сформулюйте критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.